Etude de la stratégie de réécriture de termes k-bornée

Marc Sylvestre

université de BORDEAUX

THÈSE PRÉSENTÉE

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR DE

L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

SPÉCIALITÉ INFORMATIQUE

Par Marc SYLVESTRE

Étude de la stratégie de réécriture de termes k-bornée

Sous la direction de : Irène DURAND et Géraud SÉNIZERGUES

Soutenue le mercredi 1er octobre 2014

Membres du jury :

M. RETORE, Christian	Professeur, Université de Montpellier 2,	Président
M. GENET, Thomas	Maître de conférences, Université de Rennes 1,	Rapporteur
M. LUGIEZ, Denis	Professeur, Université de Provence,	Rapporteur
Mme. KIRCHNER, Hélène	Directeur de recherche INRIA, Le Chesnay,	Examinateur
M. SAKAROVITCH, Jacques	Directeur de recherche émérite, CNRS, Télécom ParisTech	Examinateur
Mme. DURAND, Irène	Maître de conférences, Université de Bordeaux	Directeur
M. SÉNIZERGUES, Géraud	Professeur, Université de Bordeaux	Directeur

Titre : Étude de la stratégie de réécriture de termes k-bornée

Résumé : Nous introduisons la stratégie de réécriture de termes k-bornée (bo(k), pour k entier) pour les systèmes linéaires. Cette stratégie est associée à une classe de systèmes dits k-bornés LBO(k). Nous démontrons que les systèmes de la classe LBO (union des LBO(k) pour tous les k), inversent-préservent la reconnaissabilité. Nous montrons que les différents problèmes de terminaison et d'inverse-terminaison pour la stratégie bo(k) sont décidables et utilisons ce résultat pour démontrer la décidabilité de ces problèmes pour des sous-classes de LBO: les classes de systèmes linéaires fortement k-bornés: LFBO(k). La classe LFBO (union des LFBO(k)) inclut strictement de nombreuses classes de systèmes connues: les systèmes inverses basiques à gauche, linéaires growing, et linéaires inverses Finite-Path-Overlapping. Le problème de l'appartenance à LFBO(k) est décidable alors qu'il ne l'est pas pour LBO(0). Pour les mots, nous prouvons que la stratégie bo(k) préserve l'algébricité. Nous étendons la notion de réécriture k-bornée aux systèmes de réécriture de termes linéaires à gauche. Comme dans le cas linéaire, nous associons à cette stratégie la classe des systèmes linéaires à gauche k-bornés BO(k) qui étend la classe LBO(k). Nous démontrons que les systèmes de cette classe inverse-préservent la reconnaissabilité. Comme dans le cas linéaire, nous définissons ensuite la classe des systèmes fortement k-bornés FBO(k), qui étend la classe LFBO(k). Nous montrons que le problème de l'appartenance à FBO(k) est décidable. La classe FBO contient strictement la classe des systèmes growing linéaires à gauche.

Mots clés : réécriture de termes, stratégies, préservation de la reconnaissabilité, terminaison,

---

Title : Study of the k-bounded term rewriting strategy

Abstract : We introduce k-bounded term rewriting for linear systems (bo(k), for k integer). This strategy is associated with the class of k-bounded systems LBO(k). We show that the systems in the class LBO (union of the LBO(k) for all k), inverse-preserve recognizability. We show that the problems of termination and inverse-termination for the bo(k) strategy are decidable and use this result to show the decidability of these two problems for subclasses of LBO: the classes of linear systems strongly k-bounded: LFBO(k). The class LFBO (union of the LFBO(k)) includes strictly many known classes: the inverse left-basic systems, the linear growing systems, the linear inverse Finite-Path-Overlapping systems. Membership to LFBO(k) is decidable but this is not hte case for LBO(0). For words, we show that the bo(k) strategy preserves algebricity. We extend k-bounded rewriting to left-linear systems. As in the linear case, we associate a class of systems to the strategy: the class of left-linear k-bounded systems BO(k) which extends LBO(k). We show that the systems in BO(k) inverse-preserve recognizability. As in the linear case, we define the class of strongly k-bounded systems FBO(k), which extends LFBO(k). Membership to FBO(k) is proved decidable. The FBO class contains stricly the class of left-linear growing systems.

Keywords : term rewriting, strategies, préservation of recognizability, termination

---

Unité de recherche

Laboratoire Bordelais de Recherche en Informatique
Unité Mixte de Recherche CNRS (UMR 5800)
351, cours de la Libération F-33405 Talence cedex

Remerciements

Mes premiers remerciements vont à Irène Durand et Géraud Sénizergues qui m'ont accompagné pendant ces années, et permis d'accomplir ce travail. Leurs qualités humaines, leur investissement dans les multiples tâches qui composent le métier d'enseignant-chercheur, font qu'ils sont et resteront un exemple pour moi. Mes pensées vont aussi à chacun des membres du Jury, pour avoir accepté d'évaluer ces recherches. Leurs nombreuses remarques ainsi que leurs questions pertinentes m'ont donné matière à réfléchir, et peut-être travailler, pendant de nombreuses années encore. Je remercie aussi Sylvain Salvati qui a contribué à la partie “mots” de cette thèse, et avec qui travailler a été un vrai plaisir. Je n'oublie pas aussi de remercier le LaBRI, pour l'accueil remarquable qu'il offre aux doctorants. Cela semble sans doute un peu étrange de remercier un Laboratoire. Mais ce n'est pas le laboratoire que je remercie, mais l'équipe administrative, les membres de l'équipe de recherche à laquelle j'appartenais, et plus largement l'ensemble des gens que j'ai eu la chance de croiser tout au long de ces années. J'ai la chance d'avoir une famille formidable, que je remercie aussi. Il y a aussi bien entendu, mes amis et mes proches à qui j'ai aussi déjà dit merci, et bien je le leur redis, par écrit : Merci !

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

1.1 Méthodes formelles

Cette thèse s'inscrit dans l'étude des méthodes formelles. Les méthodes formelles permettent d'étudier tous types d'objets issus du "monde réel" à l'aide d'outils mathématiques. Ces objets sont bien souvent des logiciels, ou du matériel électronique. Le but peut être par exemple de fournir des preuves du bon fonctionnement et de la correction de ces logiciels ou composants électroniques. Cette approche s'oppose au modèle standard de développement de logiciel suivant le cycle en V. Dans ce cycle, une fois les besoins identifiés, on définit les spécifications fonctionnelles que le logiciel doit vérifier, puis on entre dans la phase de développement. On finit en s'assurant du bon fonctionnement du logiciel en effectuant différents tests. Ce cycle de développement est largement utilisé dans l'industrie et semble donc assurer le bon fonctionnement des logiciels. Toutefois, il est en général tout bonnement impossible de définir une batterie de tests permettant de prouver que le logiciel fonctionnera dans tout les cas (le nombre de tests à effectuer peut par exemple s'avérer infini, et définir la liste des tests à effectuer est bien souvent impossible). L'approche utilisant les méthodes formelles est tout autre. Elle vise à assurer que les spécifications fonctionnelles sont cohérentes et à vérifier à chaque étape du processus de développement que les spécifications sont respectées en fournissant une preuve de cela (que l'on cherche en général à obtenir de manière automatique). Ces méthodes permettent d'obtenir une très forte assurance de l'absence d'erreurs dans le logiciel obtenu. Elles peuvent aussi servir à repérer des erreurs dans la conception de logiciels déjà existant, ou de démontrer que des protocoles ne sont pas sûrs. Une telle approche de développement reste coûteuse et elle est en générale réservée au développement des logiciels les plus critiques. Ces logiciels se retrouvent dans beaucoup de pans de l'industrie, tels que l'automobile, l'aviation, ou le système bancaire... Elles permettent aussi d'assurer la sûreté de certains échanges sur les réseaux. À l'avenir, elles devraient jouer un rôle de plus en plus prépondérant. Par exemple pour que pour le développement et l'utilisation de drônes volant civils puissent être effectifs, il faudra s'assurer de l'absence de risques liés à l'emploi d'une telle technologie à grande échelle. En assurant par exemple qu'un drône ne pourra échapper au contrôle de son opérateur, ou qu'il rentre seul à la base en cas de problème. Il faudra aussi certainement interdire le survol de certaines zones. Pour ce faire, il faudra définir tout un type de règles que les drônes devront respecter pour avoir le droit d'être utilisés, et s'assurer quelles seront respectées en en donnant la preuve. La réalisation d'un tel travail demandera sans doute encore de nombreuses années de recherches et de développements à de nombreux chercheurs et ingénieurs. Ces approches utilisant les méthodes formelles ont déjà montré leur efficacité, et si l'on ose entrer dans un avion sans trop craindre pour sa vie, c'est en grande partie grâce aux travaux de G. Berry et de toutes ses équipes qui ont permis le développement des logiciels Esterel [7] et SCADE (`http://www.esterel-technologies.com/products/scade-system/` basé sur le language Lustre) utilisés, par exemple, pour le développement de l'airbus A340. Plus récemment, notons les travaux menés par X. Leroy et son équipe à L'INRIA et qui ont abouti à une certification du bon fonctionnement du compilateur CompCert (voir [68]) d'un large sous-ensemble du langage C vers l'assembleur PowerPC. Ce travail réalisé est essentiel. En effet, s'assurer de la correction de l'implémentation d'un logiciel à l'aide de méthodes formelles n'est en rien satisfaisant si l'on ne s'assure pas que le compilateur fonctionne correctement. Notons aussi l'utilisation des méthodes formelles pour l'assistance à la recherche de preuves, avec l'utilisation d'outils comme Coq [86] (qui peut aussi servir à fournir la preuve de la correction de logiciels, comme dans le cas de CompCert [68]). Dans cette thèse, nous ne nous intéresserons pas directement à l'application de ces méthodes. Nous étudierons des problèmes issus de l'étude des méthodes formelles, et ayant trait à l'étude des langages. Toutefois, nous verrons que la plupart des résultats obtenus pourraient trouver des applications concrètes.

1.2 Objet de notre étude

Nous nous intéressons à la réécriture de termes. Les objets que nous réécrivons sont des termes. Une règle de réécriture de termes est une paire $l \to r$ de termes. Un système de réécriture de termes $\mathcal{R}$ est un ensemble fini de règles de réécriture. Étant donnés deux termes s, t, nous noterons $s \to_{\mathcal{R}} t$ s'il existe un pas de réécriture entre s et t dans $\mathcal{R}$, et $s \to_{\mathcal{R}}^{*} t$ s'il existe une dérivation (une suite de pas de réécriture, éventuellement de longueur 0) entre s et t dans $\mathcal{R}$. Nous noterons $s \leftrightarrow_{\mathcal{R}}^{*} t$ s'il existe une dérivation entre s et t dans $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$ ($\mathcal{R}^{-1} = \{r \to l \mid l \to r \in \mathcal{R}\}$). Les définitions formelles sont données dans le chapitre 2.

1.3 Courte introduction historique

La réécriture est la théorie de la transformation pas à pas d'objets. Dans cette thèse, les objets seront des termes, ou des mots, mais bien souvent vus comme des termes unaires (voir la section 2.10). Puisqu'un calcul peut être vu comme une suite de transformations élémentaires effectuées à l'aide d'axiomes et de règles de calcul, les systèmes de réécriture de termes (ou de mots) ont la propriété d'universalité, en ce sens qu'ils permettent de modéliser n'importe quel calcul. L'origine de l'idée de réécriture apparaît dans l'algèbre via les systèmes d'équations. Étant donné un système d'équations, peut-on par exemple s'assurer de l'existence d'une méthode permettant de montrer que deux termes sont identiques modulo le système d'équations ? Ce problème est connu sous le nom de "problème du mot". Les premiers travaux autour de cette problématique de réécriture sont en général attribués à A. Thue qui dans son article de 1914 [91] définit le problème du mot pour un monoïde. Toutefois, il semblerait que Thue a fait bien plus, et plus tôt. M. Steinby et W. Thomas montrent dans [82] que dans [90] ("Une solution spécifique à un problème général en logique", daté de 1912), Thue avait en fait déjà à l'esprit la notion de termes et la réécriture associée. Il avait aussi déjà posé le problème du mot pour les systèmes d'équations de termes, et utilisé (plus ou moins implicitement) des concepts comme la propriété de Church-Rosser (un système de réécriture $\mathcal{R}$ a la propriété de Church-Rosser si pour tout termes s, t tels que $s \leftrightarrow_{\mathcal{R}}^* t$ il existe un terme u tel $s \rightarrow_{\mathcal{R}}^* u$ et $t \rightarrow_{\mathcal{R}}^* u$), la notion d'automate de termes, les concepts de terminaison et de paire critique... C'est J. Büchi qui semble avoir redécouvert ces travaux. Büchi va plus loin, et pense que Thue avait déjà l'intuition de l'existence de problèmes algorithmiquement indécidables (voir [15]). Certains travaux précédant ceux de Thue utilisent déjà des concepts familiers à la réécriture. Notons en particulier ceux de W. Dyck publiés en 1882 et 1883 dans lesquels il s'intéresse à la présentation de groupes par des mots ([33] et [34]). Il faudra attendre 1936 et les travaux de A. Church [18] et, en parallèle, de A. Turing [92] pour la preuve de l'existence de problèmes algorithmiquement indécidables. Les travaux de Church qui fondent les concepts de fonction et d'application au travers du Lambda-calcul marquent une autre étape importante dans la théorie de la réécriture en introduisant, sous leur forme actuelle, beaucoup de concepts centraux en réécriture, en particulier, la notion de confluence locale (un système $\mathcal{R}$ est localement confluent si pour tous termes s, t, t', tels que $s \rightarrow_{\mathcal{R}}^* t$ et $s \rightarrow_{\mathcal{R}}^* t'$ il existe un terme u tel que $t \rightarrow_{\mathcal{R}}^* u$ et $t' \rightarrow_{\mathcal{R}}^* u$), la notion de confluence (un système $\mathcal{R}$ est confluent si pour tous termes s, t, t', tels que $s \rightarrow_{\mathcal{R}}^* t$ et $s \rightarrow_{\mathcal{R}}^* t'$ il existe un terme u tel que $t \rightarrow_{\mathcal{R}}^* u$ et $t' \rightarrow_{\mathcal{R}}^* u$), de terminaison uniforme (un système termine uniformément (u-termine) s'il n'y pas de dérivation infinie dans ce système), et de forme normale (un terme est en forme normale s'il ne peut être réécrit). Un autre événement de grande importance est sans aucun doute l'introduction de la hiérarchie des grammaires formelles de N. Chomsky introduite en 1956 dans [17]. Ces travaux ont eu des répercussions dans de nombreux domaines, particulièrement en linguistique, en informatique, mais aussi en sciences cognitives puisque Chomsky soutient l'hypothèse de l'existence d'une "grammaire universelle" innée, présente chez chacun. Cette grammaire universelle aurait un rôle central dans les processus cognitifs, et donnerait des clefs pour expliquer, par exemple, comment notre espèce a pu développer des compétences comme le langage ou le raisonnement logique. Le débat sur la validité de cette hypothèse continue à être vif. Notons en particulier l'existence d'hypothèses plus restreintes comme celle de J. Piaget, voir complètement inverses, comme l'hypothèse de "tabla rassa" développée par le philosophe empiriste anglais J. Locke qui présuppose que rien ne préexiste et que l'esprit de l'enfant est comme un tableau blanc sur lequel les expériences cognitives viennent laisser leur traces (on peut considérer qu'on retrouve cette hypothèse sous une certaine forme chez certains chercheurs travaillant sur les réseaux de neurones et qui considèrent que rien ne préexiste). Les conséquences des travaux de Chomsky ont été considérables en informatique. Par exemple, les langages reconnaissables par des automates de bas en haut (nous dirons simplement reconnaissables) permettent une analyse lexicale des programmes, alors que les langages algébriques sont utilisés pour l'analyse syntaxique de ces mêmes programmes. Ces concepts et techniques ont permis de développer des compilateurs modernes, et permettent l'analyse statique des programmes. Notons aussi les travaux de D. Knuth et P. Bendix qui, en proposant leur semi-algorithme, ont encouragé et permis le développement et l'application de beaucoup de nouvelles techniques qui sont centrales dans l'étude actuelle de la réécriture de termes. Ce semi-algorithme reçoit en entrée un système d'équations $\mathcal{S}$ sur des termes et essaie de le transformer en un système de réécriture $\mathcal{R}$ confluent et qui termine uniformément ($\mathcal{R}$ est tel que pour tous termes s, t, s et t sont égaux modulo les équations de $\mathcal{S}$ si et seulement si $s \leftrightarrow^*_{\mathcal{R}} t$). Lorsqu'un système $\mathcal{R}$ est confluent et termine uniformément, tout terme s a une unique forme normale modulo les règles de $\mathcal{R}$ (i.e. pour tout terme s il existe un terme $s\downarrow_{\mathcal{R}}$ en forme normale tel que $s \rightarrow^*_{\mathcal{R}} s\downarrow_{\mathcal{R}}$ et ce terme est unique). Lorsque le semi-algorithme produit un système $\mathcal{R}$ (qui est confluent et u-termine), on peut résoudre le problème du mot en utilisant ce système. En effet deux termes s et t sont égaux modulo les règles de $\mathcal{S}$ si et seulement si leurs formes normales $s\downarrow_{\mathcal{R}}$ et $t\downarrow_{\mathcal{R}}$ sont identiques. Comme $\mathcal{R}$ u-termine, il est toujours possible de comparer $s\downarrow_{\mathcal{R}}$ et $t\downarrow_{\mathcal{R}}$ et le problème est décidable. Les prémices du semi-algorithme sont déjà présentes dans l'article [81] de A. Sirvsov qui étudie la réécriture de polynômes (en indéterminées non-commutatives), comme le fait remarquer l'article [11]. Notons aussi les travaux, en parallèle, de B. Buchberger [14] qui ont permis de développer l'algorithme à son nom qui est très proche de l'algorithme de Knuth-Bendix. Il existe d'autres formes de réécriture que la réécriture de termes et de mots. Par exemple la réécriture abstraite qui généralise la réécriture en considérant n'importe quelle relation $\mathcal{R}$ portant sur n'importe quel type d'objet. Il y a aussi la réécriture d'ordre supérieur qui s'applique elle à des termes typés (le lambda-calcul d'ordre supérieur en est un cas particulier). Ou bien encore la réécriture de graphes (ou plutôt les réécritures de graphes, comme le fait remarquer l'article [22]). De nos jours, les applications de la réécriture touchent de nombreux champs de l'informatique, avec par exemple des applications en cryptographie [40], [4], pour l'analyse statique de langages de programmation [9], [65], et même en biologie pour l'analyse de réactions au sein de systèmes métaboliques (voir par exemple les travaux de A. Tiwari et al. du Computer Science Laboratory [**?**], ou ceux de O. Andrei et H. Kirchner [3])... Des langages de programmation fonctionnelle basés essentiellement sur la réécriture de termes ont aussi été développés (par exemple le langage Q développé par A. Gräf, et son successeur Pure `http://purelang.bitbucket.org`, le système Maud `http://maude.cs.uiuc.edu`, ou le langage Tom `http://tom.loria.fr`). Les résultats présentés dans cette thèse peuvent être qualifiés de "théoriques" puisqu'aucun programme n'a été développé. Toutefois, tous les résultats obtenus (à l'exception bien entendu du résultat d'indécidabilité de l'appartenance à la classe $\mathsf{LBO}(0)$) sont constructifs et chacun d'entre eux pourrait être implémenté, soit en analysant les preuves et en construisant des algorithmes ad-hoc, soit en réutilisant directement des programmes déjà existants et fonctionnant pour les systèmes clos.

1.4 Organisation du document et présentation des résultats obtenus

Le chapitre 2 est consacré à l'introduction des différents concepts et notations que nous allons utiliser. Les autres chapitres commencent tous par une présentation informelle des définitions et des résultats obtenus.

Le chapitre 3 est consacré à l'introduction et à l'étude de la stratégie de dérivation k-bornée ($\mathsf{bo}(k)$) et de la stratégie de dérivation de bas en haut pour les systèmes linéaires, ainsi qu'à l'étude de différents problèmes pour les classes de systèmes associées à ses stratégies :

— la classe des systèmes linéaires k-bornés notée $\mathsf{LBO}(k)$: un système appartient à $\mathsf{LBO}(k)$ si toute dérivation peut être remplacée par une dérivation $\mathsf{bo}(k)$,

— et la sous-classe des systèmes linéaires fortement k-bornés $\mathsf{LFBO}(k)$: un système appartient à $\mathsf{LFBO}(k)$ si toute dérivation de bas en haut est $\mathsf{bo}(k)$. Nous verrons qu'il s'agit bien d'une sous-classe puisque la stratégie de bas en haut n'est pas restrictive (proposition 3.23 : toute dérivation peut être remplacée par une dérivation de bas en haut).

Nous démontrerons que la stratégie $\mathsf{bo}(k)$ inverse-préserve (i-préserve) la reconnaissabilité, i.e. que pour tout système linéaire à gauche, et pour tout ensemble de termes T reconnaissable (voir section 2.12.1), l'ensemble

$$({}_{\mathsf{bo}(k)}\!\!\to^*_{\mathcal{R}})[T] = \{s \mid \exists t \in T,\ s \ {}_{\mathsf{bo}(k)}\!\!\to^*_{\mathcal{R}} t\}$$

est reconnaissable et peut être construit ($s \ {}_{\mathsf{bo}(k)}\!\!\to^*_{\mathcal{R}} t$ signifiant qu'il y a une dérivation $\mathsf{bo}(k)$ entre s et t dans $\mathcal{R}$). Nous obtenons ce résultat en simulant les dérivations $\mathsf{bo}(k)$ à l'aide d'un système clos. Par conséquent, les systèmes $\mathsf{LBO}(k)$ i-préservent la reconnaissabilité (pour tout système $\mathcal{R} \in \mathsf{LBO}(k)$ et tout ensemble reconnaissable T, l'ensemble $(\to^*_{\mathcal{R}})[T]$ est reconnaissable et peut être construit). Ce résultat n'est pas réellement nouveau, puisque nous verrons qu'il s'agit essentiellement d'une autre formulation du résultat obtenu pour les systèmes bottom-up(k) introduits par I. Durand et G. Sénizergues [30] (section 3.12.1). Nous apportons une nouveauté à la preuve en démontrant grâce à la proposition 3.23 qu'il suffit d'étudier le problème pour $k = 0$ (notons que grâce à la proposition 3.94 ce résultat s'applique aussi aux systèmes $\mathsf{BU}(k)$). Cette simulation des dérivations $\mathsf{bo}(k)$ par un système clos nous permettra aussi de démontrer que les problèmes de terminaison, d'uniforme-terminaison (u-terminaison), d'inverse-terminaison (i-terminaison), et d'inverse-uniforme-terminaison (i-u-terminaison) sont décidables pour la stratégie $\mathsf{bo}(k)$ (voir section 2.8 pour une définition formelle de ces problèmes). Nous en déduirons que les problèmes de terminaison et de i-terminaison sont décidables pour la classe $\mathsf{LBO}(k)$, et que les problèmes de u-terminaison et de i-u-terminaison sont décidables pour la classe $\mathsf{LFBO}(k)$. Nous montrons ensuite que le problème de l'appartenance à $\mathsf{LBO}(0)$ est indécidable (en utilisant l'indécidabilité de l'appartenance à $\mathsf{BU}(0)$ démontrée dans [30] et la proposition 3.94). Le fait que le problème de l'appartenance à $\mathsf{LBO}(0)$ (et sans doute $\mathsf{LBO}(k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$) soit indécidable pourrait poser un problème pour utiliser "concrètement" la classe des systèmes $\mathsf{LBO}(k)$. Toutefois, nous démontrons que pour la sous-classe des systèmes $\mathsf{LFBO}(k)$, le problème de l'appartenance est décidable. Notons que la classe $\mathsf{LFBO} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathsf{LFBO}(k)$

étend la classe des systèmes linéaires inverse-finite-path-overlapping (section 3.13). Elle est orthogonale à la classe des systèmes match-bounded (section 3.14). Ces résultats ont fait l'objet d'une publication [32], et ont été sélectionnés pour apparaître dans [83] (l'édition spéciale n'a pas été éditée).

Dans le chapitre 4, nous démontrons que lorsqu'on se restreint aux systèmes de réécriture de mots, la stratégie $\mathsf{bo}(k)$ préserve l'algébricité (l'image directe d'un ensemble algébrique par la réécriture $\mathsf{bo}(k)$ est algébrique). Pour démontrer ce résultat, nous simulons les dérivations $\mathsf{bo}(k)$ à l'aide d'une grammaire algébrique. La preuve présentée ici étend la preuve donnée par J. Sakarovitch pour les systèmes de réécritures inverses basiques à gauche [76]. Toutefois, nous utilisons une grammaire algébrique, et non un automate à pile. Une preuve utilisant une grammaire plutôt qu'un automate avait déjà été présentée pour les systèmes inverses basiques à gauche par Sénizergues dans son cours [84]. Ces résultats n'ont pas pour l'instant fait l'objet d'une publication, et sont présentés pour la première fois dans cette thèse.

Dans le chapitre 5, nous étendons la classe $\mathsf{LBO}(k)$ aux systèmes linéaires à gauche, mais pas nécessairement à droite. Cette extension n'est pas triviale. Pour la définir nous introduisons un symbole binaire E et un système de réécriture auxiliaire $\mathcal{E}$ contenant trois règles pour manipuler ce symbole :

— une règle d'introduction du symbole : $x \to E(x, x)$,

— deux règles de sélections : $E(x, y) \to x$ et $E(x, y) \to y$.

Les notions de dérivation $\mathsf{bo}(k)$ et de dérivation de bas en haut pour un système de réécriture de termes linéaire à gauche $\mathcal{R}$ sont ensuite définies pour le système $\mathcal{R} \cup \mathcal{E}$. Les classes associées sont elles aussi définies à partir de $\mathcal{R} \cup \mathcal{E}$:

— la classe des systèmes linéaires à gauche k-bornés notée $\mathsf{BO}(k)$: un système $\mathcal{R}$ appartient à $\mathsf{BO}(k)$ si toute dérivation $s \to_{\mathcal{R}}^* t$ peut être remplacée par une dérivation $\mathsf{bo}(k)$ de s vers t (avec des pas dans $\mathcal{R} \cup \mathcal{E}$, on dit que $s \to_{\mathcal{R}}^*$ est $\mathsf{bo}(k)$ convertible),

— et la sous-classe des systèmes linéaires à gauche fortement k-bornés $\mathsf{FBO}(k)$: un système appartient à $\mathsf{FBO}(k)$ si toute dérivation de bas en haut est $\mathsf{bo}(k)$. Nous verrons qu'il s'agit bien d'une sous-classe puisque la stratégie de bas en haut n'est pas restrictive (proposition 5.62 : toute dérivation dans $\mathcal{R}$ peut être remplacée par une dérivation de bas en haut dans $\mathcal{R} \cup \mathcal{E}$).

Comme dans le cas linéaire, nous démontrerons que la stratégie $\mathsf{bo}(k)$ i-préserve la reconnaissabilité en simulant les dérivations $\mathsf{bo}(k)$, mais cette fois à l'aide d'un transducteur de termes clos (TTC). Nous en déduisons que les systèmes $\mathsf{FBO}(k)$ i-préservent la reconnaissabilité et que le problème de l'i-terminaison est décidable pour la classe $\mathsf{BO}(k)$. Comme dans le cas linéaire, nous démontrons que l'appartenance à la classe des systèmes $\mathsf{FBO}(k)$ est décidable. Nous démontrons ensuite que cette classe contient les systèmes growing linéaires à gauche (section 5.5.7), et vraisemblablement tous les systèmes inverses Right-Linear-Finite-Path-Overlapping. Ces résultats ont fait l'objet d'une publication [58].

1.5 La réécriture en pratique : exemples d'utilisations et applications potentielles de nos recherches

Nous l'avons dit, un système de réécriture de termes (ou simplement système) peut modéliser n'importe quelle fonction calculable. Il est aussi possible de se servir d'un système $\mathcal{R}$ pour modéliser non plus une fonction mais un programme. On pourra par exemple considérer que les termes codent l'état du programme à un temps donné, alors que les pas de réécriture dans $\mathcal{R}$ représentent les transitions entre ces états. Ainsi, si on code l'entrée d'un programme à l'aide d'un terme s, alors l'exécution du programme est modélisée par une suite de pas de réécriture, et le résultat du calcul est représenté par t une forme normale de s. Notons que nous pouvons modéliser là des processus non déterministes (une même entrée s peut produire plusieurs résultats t). En effet, à chaque étape, plusieurs règles peuvent être appliquées à un même endroit, ou même à des endroits différents, et il n'y a aucune garantie qu'une forme normale existe ou qu'elle soit unique : le calcul n'est pas sûr d'aboutir, et il n'est pas déterministe. Pour qu'un système de réécriture $\mathcal{R}$ modélise un programme déterministe qui termine, il faut s'assurer que le système termine sur tous les termes (propriété d'uniforme-terminaison de $\mathcal{R}$), et que chaque terme a une unique forme normale. Notons qu'il est aussi possible de restreindre les pas de réécriture possibles au cours d'une dérivation en imposant une stratégie de réécriture qui assure l'existence et l'unicité des formes normales. Prenons un exemple très simple. Si on code les entiers à partir de l'opération unaire successeur s et du symbole de constante 0, et que l'on considère le système (en adoptant la notation préfixée $+(x, y)$ pour le terme $x + y$)

$$\begin{aligned}\mathcal{R} = \{&\mathsf{s}(+(\mathsf{s}(x), y)) \to \mathsf{s}(\mathsf{s}(+(x, y))),\ \mathsf{s}(+(x, \mathsf{s}(y))) \to \mathsf{s}(\mathsf{s}(+(x, y))),\\ &\mathsf{s}(+(0, x)) \to \mathsf{s}(x)\},\end{aligned}$$

alors, $\mathcal{R}$ modélise un programme permettant de calculer le résultat d'une addition (sous la forme d'un entier codé $\mathsf{s}(\ldots\mathsf{s}(0))$). Il est en effet facilement vérifiable que ce système u-termine, et que chaque terme s a une unique forme normale. Par exemple le résultat de $1 + 2$ est la forme normale obtenue à la suite de ce calcul :

$$\begin{aligned}+(\mathsf{s}(0), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) &\to^*_{\mathsf{s}(+(\mathsf{s}(x),y))\to\mathsf{s}(\mathsf{s}(+(x,y)))} \mathsf{s}(+(0, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))))\\ &\to_{\mathsf{s}(+(0,x))\to\mathsf{s}(x)} \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))),\end{aligned}$$

qui est bien 3 (codé par $\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$). Le sens dans lequel on applique les règles n'influence pas le résultat obtenu, et le programme modélisé par ce système est déterministe. Ainsi, nous avons résolu le problème du mot pour ce système (il est possible de résoudre le problème du mot pour un système $\mathcal{R}$ s'il y a une procédure automatique qui permet pour tous termes s et t de savoir s'il y a une dérivation $s \leftrightarrow^*_{\mathcal{R}} t$). Pour ce faire, étant donné deux termes s et t il suffit de comparer les formes normales de t et s ($t \downarrow_{\mathcal{R}}$ et $s \downarrow_{\mathcal{R}}$) pour savoir si s et t sont égaux modulo les règles d'additions représentés par le système $\mathcal{R}$. Pour s'assurer qu'une telle approche fonctionne, on peut imposer des conditions syntaxiques sur la forme des règles, ou des conditions syntaxiques sur la forme des dérivations autorisées pour le calcul des formes normales (on parle alors de stratégie de dérivation), voir même imaginer un système de réécriture et une stratégie qui assurent l'unicité des formes normales, et qui modélisent le fonctionnement d'un programme en assurant la terminaison uniforme et l'unicité des formes normales. Nous introduirons de nouvelles stratégies qui trouveront peut-être un jour des applications dans les domaines cités précédemment.

1.5.1 Utilisation de la propriété d'inverse préservation de la reconnaissabilité

Nous démontrerons que les systèmes de la classe $\mathsf{BO}(k)$ i-préservent la reconnaissabilité et que les systèmes de réécriture de mots $\mathsf{LBO}(k)$ préservent l'algébricité. Nous allons voir que des propriétés de ce type ont été utilisées dans le cadre de la vérification formelle de propriétés de sécurité relatives à des protocoles de communications cryptographiques. On les retrouve dans énormément de secteurs de l'industrie : aviation, automobile, armement, systèmes de données critiques... Des outils comme Timbuk (`http://www.irisa.fr/celtique/genet/timbuk/`, développé à l'université d'Orléans par T. Genet et al., et qui sert de base au logiciel TA4SP [10]) ont permis de découvrir des failles de sécurité dans ces protocoles de communication cryptographiques. Ces outils peuvent aussi, au contraire, permettre de valider certaines propriétés de sécurité. Dans l'approche proposée par Gent et F. Klay dans [40], on suppose que la confidentialité des communications est assurée : un intrus ne peut décrypter les messages. S'assurer de la confidentialité des échanges n'est pas suffisant. Il faut aussi garantir l'authentification, c'est-à-dire montrer que quelqu'un de malintentionné M ne pourrait pas se faire passer pour A alors qu'il communique avec B, sans être pour autant capable de déchiffrer les messages échangés entre A et B. Par exemple, si A est un individu et B est un distributeur automatique de billets, il faut s'assurer qu'aucun individu M ne peut retirer de l'argent à B en utilisant la carte de A, mais sans connaître son code. Sinon, M pourrait vider le compte en banque de A. On commence par représenter les connaissances accessibles à l'assaillant M à l'aide d'un langage C, reconnaissable par un automate de termes de bas en haut. Les différentes étapes du protocole sont représentées par un système de réécriture de termes $\mathcal{R}$. Le but est alors de construire $[C](\rightarrow^*_{\mathcal{R}})$, l'image directe de C par les dérivations de $\mathcal{R}$, ou encore une sur-approximation de cette image. Si cette image ou la sur-approximation n'intersecte pas l'ensemble ID des termes représentant la validation par B de l'identité de A, alors l'authentification est assurée (on ne peut usurper l'identité de A). Si par contre ID intersecte $[C](\rightarrow^*_{\mathcal{R}})$ (ou une sous-approximation de cette image), alors l'authentification n'est pas assurée. Dans certains cas, il est même possible de décrire l'attaque à effectuer pour contourner le protocole en retrouvant la dérivation à effectuer pour mener l'attaque. De même, si l'image inverse $(\rightarrow^*_{\mathcal{R}})[\mathsf{ID}]$ (où une sous-approximation de cette image) des termes représentant les états de validation par B de l'identité de A intersecte C l'ensemble des données accessibles à l'assaillant, alors l'authentification n'est pas assurée, et le protocole contient une faille. Nous proposerons une méthode pour calculer des sous-approximations de l'image de $(\rightarrow^*_{\mathcal{R}})[\mathsf{ID}]$ (lorsque ID est reconnaissable) dans le cas de systèmes de réécriture linéaires à gauche (lorsque le système $\mathcal{R} \in \mathsf{BO}(k)$, la méthode proposée aboutit sur l'image $(\rightarrow^*_{\mathcal{R}})[\mathsf{ID}]$). Cette méthode pourrait être implémentée à l'aide d'outils déjà existant, par exemple l'outil Autowrite développé par Durand [28]. Dans le cas des mots, nous proposons une méthode pour calculer une sous-approximation de $[C](\to^*_{\mathcal{R}})$ pour les systèmes k-bornés, mais l'ensemble obtenu est algébrique (ces systèmes préservent l'algébricité) (si $\mathcal{R} \in \mathsf{LBO}(k)$, alors la méthode aboutit sur $[C](\to^*_{\mathcal{R}})$). Nos travaux font suite à de très nombreux travaux visant à définir des classes de systèmes, les plus larges possibles, qui préservent effectivement la reconnaissabilité (effectivement signifie que l'on dispose d'un algorithme pour calculer l'image d'un ensemble reconnaissable par un système de cette classe, en plus de savoir qu'il est reconnaissable) [21], [49], [50], [53], [62], [77], [85], [42] et la bibliothèque associée [93] permettant d'automatiser la démonstration de propriétés pour les systèmes match-bounded, dont nous dirons quelques mots au cours de cette thèse dans la section 3.14 ; et, bien entendu, les systèmes bottom-up(k) ([30], [31]), à l'origine de ces travaux, et dont nous évoquons les liens les unissant avec les systèmes linéaires k-bornés dans la section 3.12. Ce type d'approche peut être étendu à d'autres protocoles, programmes, ou processus jugés critiques. Si les protocoles d'authentification utilisés par les banques semblent maintenant sûrs, ce n'est pas le cas de très nombreux protocoles utilisés quotidiennement, par exemple sur Internet, ou, bientôt, dans les communications entre les différents objets connectés qui risquent de se multiplier dans un futur proche. Trouver des méthodes formelles pour s'assurer du bon fonctionnement de ces protocoles semble essentiel pour assurer l'intégrité des communications au sein des réseaux informatiques.

Les résultats de i-préservation ou de préservation de la reconnaissabilité s'accompagnent souvent de résultats concernant la terminaison des systèmes de réécriture. Par exemple, un système de réécriture linéaire à gauche qui vérifie $\mathcal{V}\mathsf{ar}(r) \subseteq \mathcal{V}\mathsf{ar}(l)$ i-termine (i.e le problème de savoir, étant donné un terme t et un système R linéaire à gauche qui i-préserve la reconnaissabilité, si une dérivation infinie dans $\mathcal{R}$ part de t est décidable). On obtient aussi parfois des méthodes pour décider de l'u-terminaison [71], [43], [42]. De même, dès qu'un système préserve la reconnaissabilité, le problème de la confluence locale et le problème de l'accessibilité deviennent décidables [50], [53]. Ou bien encore, lorsqu'un système i-préserve la rationalité, on peut obtenir une méthode pour le calcul dit "call by need" [29].

1.5.2 Problème de la terminaison et de la terminaison uniforme

Nous distinguons le problème de terminaison : pour un système $\mathcal{R}$ et un terme s existe-t-il une dérivation infinie dans $\mathcal{R}$ commençant par s ? Et le problème de terminaison uniforme (u-terminaison) : pour un système $\mathcal{R}$ existe-t-il une dérivation infinie ? Ces problèmes de terminaison sont indécidables si l'on considère toute la classe des systèmes de réécriture de termes [57]. Ils sont aussi indécidables aussi pour des classes beaucoup plus restreintes (voir par exemple [23], [16], [24], [79], [70], ou [75]). Un système $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{F}$ u-termine si et seulement s'il existe une relation d'ordre $>$ bien fondée sur $\mathcal{F}$ et telle que pour tout $l \to r \in \mathcal{R},\ l > r$. Comme le problème de la u-terminaison est indécidable, il n'existe pas de méthode pour décider l'existence d'un tel ordre. Aussi, différentes stratégies ont été développées pour montrer que pour certaines classes, l'existence d'un tel ordre est décidable. Notons aussi l'existence de notions plus restrictives que la notion de terminaison construite à partir de différents types d'ordres (voir par exemple [72], [94], [41], [39] ou [44] pour un survol de certaines de ces notions).

Lorsqu'un un système termine uniformément, la propriété de confluence devient décidable ([64], il suffit de se limiter à l'étude d'un nombre fini de paires critiques). À nouveau, dans le cadre de la vérification, s'assurer de la terminaison ou de la non-terminaison d'un programme ou d'un processus s'avère essentiel. Par exemple, il est souhaitable qu'une calculatrice finisse son calcul. Inversement, il n'est pas souhaitable que le système contrôlant l'intégrité d'une centrale nucléaire s'arrête inopinément. Plus généralement, des techniques pour montrer la terminaison ou la non terminaison des systèmes sont employées dans des secteurs aussi variés que l'aéronautique, l'industrie automobile, ou pour la démonstration automatique de théorèmes... De nombreux outils ont été développés pour étudier la terminaison de programmes et de systèmes de réécriture. Pour les systèmes de réécriture, notons l'existence de nombreux logiciels permettant de résoudre ces problèmes de façon automatique pour certaines classes de systèmes : CARIBOO [37], termptation [12], TTT [55] puis TTT2 [67], TORPA [95], Matchbox [93], AProVE [48] (sans doute le plus abouti à l'heure actuelle), [46], VMTL [78], CiME [20]. Certains d'entre eux offrent même une certification de la preuve obtenue. Depuis 2004, une compétition annuelle est organisée au sein de la principale conférence consacrée à la réécriture (Rewriting Techniques and Applications RTA). Elle a depuis été étendue à d'autres problèmes de terminaison, par exemple pour les programmes fonctionnels [80], ou pour la terminaison des systèmes de réécriture d'ordre supérieur (voir par exemple [61] ou [47]).

Chapitre 2

Préliminaires

Cette partie introduit les notations et définitions basiques qui seront utilisées dans ce document. Nous vous invitons à consulter [19] pour plus de détails sur les automates de termes, [63] ou [6] pour la réécriture de termes, et [21] pour les liens entre les systèmes de réécriture de termes et différents types d'automates de termes.

2.1 Ensembles et relations binaires

Étant donné un ensemble E, **l'ensemble des parties** de E est noté $\mathcal{P}(E)$. Pour tous ensembles E, F, et toute relation binaire $\rightarrow \subseteq E \times F$, et pour tous sous-ensembles $E' \subseteq E$, $F' \subseteq F$, nous noterons $E' \rightarrow F'$ s'il existe $e' \in E'$, $f' \in F'$ tels que $e' \rightarrow f'$. Nous simplifierons souvent $\{e'\} \rightarrow F'$ en $e' \rightarrow F'$. La **relation inverse** $\rightarrow^{-1}$ est définie par

$$\forall f \in F, \forall e \in E, f \rightarrow^{-1} e \Leftrightarrow e \rightarrow f \ .$$

Nous noterons $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels.

2.2 Les mots

Étant donné un ensemble fini A appelé **alphabet**, un **mot** sur A est une séquence finie (éventuellement vide) $a_0 \dots a_{n-1}$ de lettres de A. Le **mot vide** est noté ϵ. Un ensemble de mots est appelé un **langage de mots**. L'ensemble A^* est le langage contenant tous les mots écrits avec l'alphabet A. Il est possible de munir A^* d'une loi interne $\cdot$ appelée **produit de concaténation** : si $u = u_0 \dots u_{n-1}$ et $v = v_0 \dots v_{m-1}$ sont deux mots sur A^*, $u \cdot v$ est le mot $u_0 \dots u_{n-1} v_0 \dots v_{m-1}$. L'ensemble A^* muni de ce produit de concaténation est le monoïde libre engendré par A dont l'élément neutre est ϵ. La longueur $|a|$ d'un mot $a \in A^*$ est définie par

— $|a| := 0$ si $a = \epsilon$,

— $|a| := n$ si $a = a_0 \dots a_{n-1}$, où $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}, a_i \in A$.

Nous noterons $\boldsymbol{a \preceq b}$ si le mot a est un préfixe de b, et $\boldsymbol{a \prec b}$ si c'est un préfixe propre. Pour un ensemble de mots $M \subseteq A^*$, nous noterons $\textsf{\textbf{Prefix}}\boldsymbol{(M)}$

l'ensemble des préfixes des mots de M

$$\mathsf{Prefix}(M) = \{u \in A^* \mid \exists v \in M, u \preceq v\}.$$

Nous noterons $\boldsymbol{a \succeq b}$ si le mot a est un suffixe de b, et $\boldsymbol{a \succ b}$ si c'est un suffixe propre. Pour un ensemble de mots $M \subseteq A^*$, nous noterons $\mathbf{Suffix}(\boldsymbol{M})$ l'ensemble des suffixes des mots de M

$$\mathsf{Suffix}(M) = \{u \in A^* \mid \exists v \in M, u \succeq v\}.$$

Nous noterons $a \perp b$ lorsque a et b sont incomparables pour $\preceq$.

2.3 Les termes

Une **signature** est la donnée d'un couple $(\mathcal{F}, \mathsf{arity})$ où $\mathcal{F}$ est un ensemble dénombrable et arity est une fonction de $\mathcal{F}$ dans $\mathbb{N}$. L'**arité** d'un symbole $f \in \mathcal{F}$ est $\mathsf{arity}(f)$. L'ensemble des symboles d'arité p est dénoté par $\mathcal{F}_p$. Les éléments d'arité $0, 1, \ldots, p$ sont respectivement appelés des symboles de constantes, unaires et p-aires. La plupart du temps, nous considérons que l'ensemble $\mathcal{F}$ est fini, et dans le cas contraire nous le préciserons. Nous supposerons toujours que $\mathcal{F}$ contient au moins un symbole de constante. Soit $\mathcal{V}$ un ensemble de symboles d'arité 0 appelées variables. On suppose de plus que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{V}$ sont disjoints. L'ensemble des **termes** $\boldsymbol{\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})}$ construits avec la signature $\mathcal{F}$ et les variables $\mathcal{V}$ est le plus petit ensemble défini par :

— $\mathcal{F}_0 \cup \mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$

— si $p \geq 1, f \in \mathcal{F}_p$ et $t_0, \ldots, t_{p-1} \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$, alors $f(t_0, \ldots, t_{p-1}) \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$.

Si $\mathcal{V} = \emptyset$, alors nous notons $\boldsymbol{\mathcal{T}(\mathcal{F})}$ l'ensemble $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$. Les termes de $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ sont appelés les **termes clos**. Nous utiliserons parfois la notation $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ lorsque la signature est clairement fixée pour désigner cet ensemble, et la notation $\boldsymbol{\mathcal{T}(\mathcal{V})}$ pour l'ensemble des termes $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$.
Un terme t est **linéaire** si chaque variable apparaît au plus une fois dans le terme t. L'ensemble des variables de t est noté $\boldsymbol{\mathcal{V}\mathsf{ar}(t)}$. Un **arbre** étiqueté par un ensemble de d'étiquettes E est une fonction d'un ensemble préfixe-clos $\mathcal{P}\mathsf{os}(t) \subseteq \mathbb{N}^*$ dans E. Ainsi, nous pouvons voir un terme $t \in \mathcal{T}(\mathcal{V})$ comme un arbre fini ordonné dont les feuilles sont étiquetées par des symboles de constantes et les nœuds internes par des symboles qui respectent l'arité, c'est-à-dire tels que le degré sortant corresponde à l'arité du symbole. Plus précisément, un terme $t \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ peut aussi être défini comme une fonction $t : N^* \to \mathcal{F} \cup \mathcal{V}$ ayant pour domaine $\mathcal{P}\mathsf{os}(t)$ et telle que $\mathcal{P}\mathsf{os}(t)$ satisfasse les conditions suivantes :

1. $\mathcal{P}\mathsf{os}(t)$ est non vide et préfixe-clos
2. $\forall p \in \mathcal{P}\mathsf{os}(t)$, si $t(p) \in \mathcal{F}_n, n \geq 1$, alors $\{j \mid pj \in \mathcal{P}\mathsf{os}(t)\}$ pour $j \in \{0, \ldots, n-1\}$
3. $\forall p \in \mathcal{P}\mathsf{os}(t)$, si $t(p) \in \mathcal{V} \cup \mathcal{F}_0$ alors $\{j \mid pj \in \mathcal{P}\mathsf{os}(t)\} = \emptyset$.

Nous noterons $\boldsymbol{\mathcal{L}\mathsf{v}(t)}$ l'ensemble des feuilles de t, c'est-à-dire l'ensemble des positions étiquetées par un symbole de constante.
Soit $u_n \in \mathcal{L}\mathsf{v}(t)$. La **branche aboutissant sur $\boldsymbol{u_n}$** est la suite de position

$$(\epsilon, u_0, \ldots, u_n),$$

où $\mathcal{P}\mathsf{os}^{\preceq u_n}(t) = \{u_0, \ldots, u_n\}$, et pour tout $0 \le i < j \le n$, $\epsilon \prec u_i \prec u_j$.
Le symbole à la racine de t est noté $\mathbf{root}(\boldsymbol{t})$. Étant donné un ensemble de symbole $A \subseteq \mathcal{F} \cup \mathcal{V}$, nous noterons $\boldsymbol{\mathcal{P}\mathsf{os}_{\mathcal{A}}(t)}$ l'ensemble des positions de t étiquetées par un symbole de A

$$\mathcal{P}\mathsf{os}_{\mathcal{A}}(t) = \{u \in \mathcal{P}\mathsf{os}(t) \mid t(u) \in \mathcal{A}\}.$$

Nous noterons $\boldsymbol{\mathcal{P}\mathsf{os}_{\backslash\mathcal{A}}(t)}$ le complémentaire de $\mathcal{P}\mathsf{os}_{\mathcal{A}}(t)$ dans $\mathcal{P}\mathsf{os}(t)$, c'est-à-dire l'ensemble des positions de t qui ne sont pas étiquetées par un symbole de $\mathcal{A}$

$$\mathcal{P}\mathsf{os}_{\backslash\mathcal{A}}(t) = \{u \in \mathcal{P}\mathsf{os}(t) \mid t(u) \notin \mathcal{A}\}.$$

Lorsque l'ensemble $\mathcal{A}$ est réduit à un seul symbole f, nous notons $\mathcal{P}\mathsf{os}_f(t)$ ce qui devrait être noté $\mathcal{P}\mathsf{os}_{\{f\}}(t)$ et $\mathcal{P}\mathsf{os}_{\backslash f}(t)$, ce qui devrait être noté $\mathcal{P}\mathsf{os}_{\backslash\{f\}}(t)$. Nous pourrons mettre à la fois un indice et un exposant sur un ensemble de positions, et par exemple noter $\mathcal{P}\mathsf{os}_{\backslash\mathcal{A}}{}^{\preceq u}(t)$ l'ensemble des positions v qui précèdent u et qui ne sont pas étiquetées par des symboles de A. Pour un terme $t \in \mathcal{T}$ et une variable x, nous noterons $\boldsymbol{\mathcal{P}\mathsf{os}(t, x)}$ l'ensemble $\mathcal{P}\mathsf{os}_x(t)$, et lorsque t est linéaire nous noterons lorsqu'elle existe $\mathbf{pos}(\boldsymbol{t, x})$ l'unique position contenue dans $\mathcal{P}\mathsf{os}_x(t)$. Pour un terme t, nous définissons $\boldsymbol{dpt(t)}$ la profondeur de t par :

— $dpt(t) := 0$ si $t \in \mathcal{V}$,

— $dpt(t) := \max\{|u| \mid u \in \mathcal{P}\mathsf{os}_{\backslash\mathcal{V}}(t)\} + 1$ sinon.

Étant donnés un terme t et un ensemble de symboles $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, nous définissons $\boldsymbol{dpt_{\backslash\mathcal{G}}(t)}$ la **profondeur de $\boldsymbol{t}$ sans compter les symboles de $\boldsymbol{\mathcal{G}}$** par

— $dpt_{\backslash\mathcal{G}}(t) := 0$ si $t \in \mathcal{V}$,

— $dpt_{\backslash\mathcal{G}}(t) := \max\{\mathsf{Card}_{\backslash\mathcal{G}}^{\prec u} \mid u \in \mathcal{P}\mathsf{os}_{\backslash\mathcal{V}}(t)\} + 1$ sinon.

Lorsque $\mathcal{G} = \emptyset$, $dpt_{\backslash\mathcal{G}}(t) = dpt(t)$.

2.4 Contexte

Parmi toutes les variables, nous distinguons une variable spéciale $\Box$. Un terme contenant $n > 0$ occurrences de $\Box$ est appelé un **n-contexte** (ou simplement contexte). Nous notons les contextes $C[]_{u_0,\ldots,u_{n-1}}$, où les u_i sont les positions de la variable $\Box$. Nous noterons $C[t_0, \ldots, t_{n-1}]_{u_1,\ldots,u_{n-1}}$ le terme $C[]_{u_0,\ldots,u_{n-1}}$ où pour chaque $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ le symbole $\Box$ à la position u_i a été remplacé par le terme t_i.
Étant donné un terme t et un ensemble de positions $\{u_0, \ldots, u_{n-1}\} \in \mathcal{P}\mathsf{os}(t)$ incomparables pour l'ordre préfixe $\preceq$. Nous noterons $t[]_{u_0,\ldots,u_{n-1}}$ le contexte obtenu en remplaçant chaque sous-terme t/u_i a la position u_i par une feuille étiquetée par $\Box$. Plusieurs notations représentent le même terme : il suffit d'intervertir les indices u_i, et par exemple $t[]_{u_0,\ldots,u_{n-1}} = t[]_{u_{n-1},\ldots,u_0}$. Si l'on note U un ensemble de positions $u_0, \ldots, u_{n-1}$ en ordre lexicographique et incomparables pour l'ordre $\preceq$, nous noterons $t[]_U$ le terme $t[]_{u_0,\ldots,u_{n-1}}$. Et pour tous termes $s_0, \ldots, s_{n-1}$, le terme $t[s_0, \ldots, s_{n-1}]_U$ désigne $t[]_U$ où les symboles $\Box$ ont été remplacés par les terme $s_0, \ldots, s_{n-1}$ en suivant l'ordre lexicographique des positions dans U.

2.5 Linéarisé d'un terme

Soit $t \in \mathcal{T}(\mathcal{V})$ et $\mathcal{V}\mathsf{ar}(t) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Le **linéarisé de $\boldsymbol{t}$** noté $\mathsf{lin}(t)$ est obtenu en substituant chaque occurrence d'une variable x_i par la variable $x_{i,j}$, où j est le numéro d'ordre de x_j (classées dans l'ordre lexicographique de leurs positions) :

$$\mathsf{lin}(t) := t[x_{1,1}, \ldots, x_{1,j_1}, \ldots, x_{n,1}, \ldots, x_{n,j_n}]_{v_{1,1},\ldots,v_{1,j_1},\ldots v_{n,1},\ldots v_{n,j_n}},$$

où pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\mathcal{P}\mathsf{os}(t, x_i) = \{v_{i,1}, \ldots, v_{i,j_i}\}$. À chaque fois que nous utilisons cette notation, nous supposons implicitement que $\mathcal{V}\mathsf{ar}(t) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, et notons $x_{i,j}$ les variables apparaissant dans $\mathsf{lin}(t)$.

2.6 Substitution

Nous introduisons maintenant la notion de substitution.

Définition 2.1. *Une* **substitution** *sur une signature $\mathcal{F}$ est une application $\sigma : \mathcal{V} \to \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$. Une* **substitution $\boldsymbol{\sigma}$ est close** *si $\sigma : \mathcal{V} \to \mathcal{T}(\mathcal{F})$. Les substitutions sont étendues à $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ en posant*

$$\forall f \in \mathcal{F}_n,\ \forall t_0, \ldots, t_{n-1},\ \sigma(f(t_0, \ldots, t_{n-1})) = f(\sigma(t_0), \ldots, \sigma(t_{n-1})).$$

Pour tout terme t et toute substitution t, nous notons $\boldsymbol{t\sigma}$ *l'application de σ à t (souvent notée $\sigma(t)$).*

2.7 Les termes marqués

La notion de termes marqués a déjà été introduite dans [42] pour définir les systèmes de réécriture de termes match-bounded. Nous en reparlons dans la section 3.14. Pour le restant de ce chapitre, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ désignent deux signatures. Soient $k, k' \in \mathbb{N}, k \leq k'$. Nous noterons $\mathcal{F}^{k,k'}$ la signature (finie)

$$\mathcal{F}^{k,k'} = \{f^i \mid f \in \mathcal{F}, i \in \mathbb{N}, k \leq i \leq k'\},$$

$\mathcal{F}^k$ la signature

$$, \mathcal{F}^k = \mathcal{F}k, k,$$

$\mathcal{F}^{\leq k}$ la signature

$$\mathcal{F}^{\leq k} = \mathcal{F}^{0,k},$$

$\mathcal{F}^{\geq k}$ la signature (infinie)

$$\mathcal{F}^{\geq k} = \bigcup_{k' \geq k} \mathcal{F}^{k,k'}$$

et $\mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ la signature (infinie)

$$\mathcal{F}^{\mathbb{N}} = \mathcal{F}^{\geq 0}.$$

Une *marque* est un entier. Un **terme marqué** (pour les signatures $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$) est un élément de $\mathcal{T}(\mathcal{F}^{\mathbb{N}} \cup \mathcal{G}, \mathcal{V})$. Un terme marqué est un terme de $\mathcal{T}(\mathcal{F} \cup \mathcal{G}, \mathcal{V})$ dont les symboles de $\mathcal{F}$ sont marqués. Un **terme marqué clos** est un élément de $\mathcal{T}(\mathcal{F}^{\mathbb{N}} \cup \mathcal{G})$. Nous considérons que les symboles de $f \in \mathcal{F} \cup \mathcal{G} \cup \mathcal{V}$ sont marqués par 0, et ainsi nous pouvons écrire $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ et $\mathcal{T}(\mathcal{F} \cup \mathcal{G}, \mathcal{V}) \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{F}^{\mathbb{N}} \cup \mathcal{G}, \mathcal{V})$. Étant donné un terme $t \in \mathcal{T}(\mathcal{F} \cup \mathcal{G}, \mathcal{V})$, nous utiliserons la notation $\bar{t}$ (ou parfois $\widetilde{t}$) pour désigner un terme marqué tel que en effaçant ses marques, on obtienne t. Ainsi, tout terme marqué s est de la forme $s = \bar{t}$ pour un certain terme $t \in \mathcal{T}(\mathcal{F} \cup \mathcal{G}, \mathcal{V})$, et nous utiliserons la notation $\bar{t}$ pour les termes marqués (parfois aussi $\widetilde{t}$).

Exemple 2.2. *Soient*

$$\mathcal{F} = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{f}, \mathsf{i}, \mathsf{g}, \mathsf{h}\} \text{ et } \mathcal{G} = \{E\}$$

deux signatures, avec a, b, c *des constantes,* f, g *et* i *deux symboles unaires,* h *et* E *deux symboles binaires. Nous avons en utilisant les notations introduites ci-dessus :*

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^1 &= \{\mathsf{a}^1, \mathsf{b}^1, \mathsf{c}^1, \mathsf{f}^1, \mathsf{g}^1, \mathsf{i}^1, \mathsf{h}^1\} \\
\mathcal{F}^{0,1} &= \{\mathsf{a}^0, \mathsf{b}^0, \mathsf{c}^0, \mathsf{f}^0, \mathsf{g}^0, \mathsf{i}^0, \mathsf{h}^0, \mathsf{a}^1, \mathsf{b}^1, \mathsf{c}^1, \mathsf{f}^1, \mathsf{g}^1, \mathsf{i}^1, \mathsf{h}^1\} = \mathcal{F} \cup \mathcal{F}^1 \\
\mathcal{F}^{\geq 1} &= \{\mathsf{a}^1, \mathsf{b}^1, \mathsf{c}^1, \mathsf{f}^1, \mathsf{g}^1, \mathsf{i}^1, \mathsf{h}^1, \mathsf{a}^2, \mathsf{b}^2, \mathsf{c}^2, \mathsf{f}^2, \mathsf{i}^2, \mathsf{h}^2, \ldots, \mathsf{a}^n, \mathsf{b}^n, \mathsf{c}^n, \mathsf{f}^n, \mathsf{g}^n, \mathsf{i}^n, \mathsf{h}^n, \ldots\} \\
&= \mathcal{F}^{\mathbb{N}} \backslash \mathcal{F}
\end{aligned}$$

Les termes suivants appartiennent à $\mathcal{T}(\mathcal{F}^{\mathbb{N}} \cup \mathcal{G}, \mathcal{V})$ *avec* $\mathcal{V} = \{x, y\}$ *:*

$$\mathsf{a}^0,\ \mathsf{a}^1,\ \mathsf{c}^8, \mathsf{f}^1(x),\ \mathsf{f}^4(\mathsf{a}^2)\ ,\ E(\mathsf{i}^0(\mathsf{a}^1), y)\ ,\ \mathsf{f}^4(E(\mathsf{a}^8, \mathsf{b}^2))\ .$$

Les variables et le symbole E *ne sont pas marqués. Les termes suivants n'appartiennent pas à* $\mathcal{T}(\mathcal{F}^{\mathbb{N}} \cup \mathcal{G}, \mathcal{V})$ *:*

$$x^2\ ,\ E^1(\mathsf{a}, y)\ ,\ \mathsf{f}^4(x^2)$$

Rappelons qu'un symbole de $\mathcal{F}$ *sans marque est considéré comme ayant la marque* 0. *Nous avons donc*

$$E(\mathsf{i}(\mathsf{a}^1), y) = E(\mathsf{i}^0(\mathsf{a}^1), y).$$

Nous utiliserons ces signatures dans la plupart nos exemples.

2.7.1 L'opération m

Définition 2.3. *L'opération* $\mathsf{m} : \mathcal{T}(\mathcal{F}^{\mathbb{N}} \cup \mathcal{G}, \mathcal{V}) \to \mathbb{N}$ *appliquée à un terme* $\bar{t}$ *renvoie la marque à la racine du terme si le symbole à la racine appartient à* $\mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ *et* 0 *sinon :*

— $\mathsf{m}(\bar{t}) = i$, *si* $\mathsf{root}(\bar{t}) = g^i \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$,

— $\mathsf{m}(\bar{t}) = 0$, *si* $\mathsf{root}(\bar{t}) \in \mathcal{G} \cup \mathcal{V}$.

Définition 2.4 (Les opérations mmax et mmin)**.** *L'opération* mmax *appliquée à un terme* $\bar{t}$ *renvoie la marque maximale présente sur ce terme :*

$$\mathsf{mmax}(\bar{t}) = \max(\{\mathsf{m}(\bar{t}/u) \mid u \in \mathcal{P}\mathsf{os}(t)\}).$$

L'opération mmin *appliquée à un terme* $\bar{t}$ *renvoie la marque minimale présente sur ce terme, à l'exception des marques présentes sur les variables et les symboles de* $\mathcal{G}$

$$\mathsf{mmin}(\bar{t}) = \min(\{\mathsf{m}(\bar{t}/u) \mid u \in \mathcal{P}\mathsf{os}_{\backslash \mathcal{V} \cup \mathcal{G}}(\bar{t})\})$$

Nous nous servirons de l'opération mmin pour définir les systèmes match-bounded dans la section 3.14. Étant donné un terme marqué $\bar{t} \in \mathcal{T}(\mathcal{F}^{\mathbb{N}} \cup \mathcal{G}, \mathcal{V})$, nous notons $\bar{t}^i$ l'unique terme obtenu à partir de $\bar{t}$ en mettant toutes les marques sur les symboles de $\mathcal{F}$ à i, c'est-à-dire l'unique terme qui vérifie les propriétés suivantes :

— $\mathcal{P}\mathsf{os}(\bar{t}^{i}) = \mathcal{P}\mathsf{os}(t)$,
— $\forall u \in \mathcal{P}\mathsf{os}_{\mathcal{G}\cup\mathcal{V}}(t), \mathsf{root}(\bar{t}/u) = \mathsf{root}(t/u)$,
— $\forall u \in \mathcal{P}\mathsf{os}_{\mathcal{F}^{\mathbb{N}}}(t), \mathsf{root}(\bar{t}/u) = \mathsf{root}(t/u)^{i}$.

Étant donné un ensemble de termes marqué T, nous notons $\boldsymbol{T^{\leq k}}$ l'ensemble de termes

$$T^{\leq k} = \{\bar{t} \in T \mid \mathsf{mmax}(\bar{t}) \leq k\}.$$

De même nous notons $\boldsymbol{T^{\geq k}}$ l'ensemble de termes

$$T^{\geq k} = \{\bar{t} \in T \mid \mathsf{mmin}(\bar{t}) \geq k\}.$$

Exemple 2.5. *Nous utilisons les signatures de l'exemple 2.2 et nous intéressons à l'ensemble des termes marqués $\mathcal{T}(\mathcal{F}^{\mathbb{N}} \cup \mathcal{G}, \mathcal{V})$. Soient*

$$\begin{aligned}\bar{s} =& E(\mathsf{f}^0(\mathsf{a}^1), y),\ \bar{t} = \mathsf{f}^4(E(\mathsf{a}^8, \mathsf{b}^2)),\\ \bar{u} =& \mathsf{f}^2(\mathsf{i}^3(x)).\end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}&\mathsf{m}(\bar{s}) = \mathsf{m}(E) = 0,\ \mathsf{m}(\bar{s}/0) = \mathsf{m}(\mathsf{f}^0) = 0,\ \mathsf{m}(\bar{s}/1) = \mathsf{m}(y) = 0,\\ &\mathsf{m}(\bar{s}/00) = \mathsf{m}(\mathsf{a}^1) = 1,\ \mathsf{mmax}(\bar{s}) = 1,\\ &\mathsf{m}(\bar{t}) = \mathsf{m}(\mathsf{f}^4) = 4,\ \mathsf{m}(\bar{t}/0) = \mathsf{m}(E) = 0\ ,\ \mathsf{m}(\bar{t}/00) = \mathsf{m}(\mathsf{a}^8) = 8,\\ &\mathsf{m}(\bar{t}/01) = \mathsf{m}(\mathsf{b}^2) = 2,\ \mathsf{mmax}(\bar{t}) = 8,\ \mathsf{mmin}(\bar{u}) = \mathsf{mmin}(\bar{t}) = 2.\end{aligned}$$

Les termes $\bar{s}^2$ et $\bar{t}^2$ sont obtenus en remplaçant toutes les marques sur les symboles de $\mathcal{F}$ dans $\bar{s}$ et $\bar{t}$ par 2

$$\bar{s}^2 = E(\mathsf{f}^2(\mathsf{a}^2), y),\ \bar{t}^2 = \mathsf{f}^2(E(\mathsf{a}^2, \mathsf{b}^2)).$$

Notons également que

$$\bar{s}^0 = s = E(\mathsf{f}(\mathsf{a}), y)\ ,\ \bar{t}^0 = t = \mathsf{f}(E(\mathsf{a}, \mathsf{b})).$$

2.7.2 L'opération $\odot_{\setminus\mathcal{H}}$

Définition 2.6 (l'opération $\odot_{\setminus\mathcal{H}}$)**.** *Pour tout terme $\bar{t} \in \mathcal{T}(\mathcal{F}^{\mathbb{N}} \cup \mathcal{G}, \mathcal{V})$, toute partie $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F} \cup \mathcal{G} \cup \mathcal{V}$, et tout entier n, nous définissons $\boldsymbol{\bar{t} \odot_{\setminus\mathcal{H}} n}$ comme l'unique terme marqué qui vérifie :*
— $(\bar{t} \odot_{\setminus\mathcal{H}} n)^0 = t$,
— $\forall u \in \mathcal{P}\mathsf{os}_{\mathcal{F}^{\mathbb{N}}}(\bar{t}), \mathsf{m}(\bar{t} \odot_{\setminus\mathcal{H}} n/u) = \max(m(\bar{t}/u), \mathsf{Card}(\mathcal{P}\mathsf{os}^{\prec u}_{\setminus\mathcal{H}}(t)) + n)$.

Nous utiliserons principalement cette opération avec $n = 0$ ou $n = 1$. Elle nous servira dans la suite à définir la notion de réécriture k-bornée, à la fois dans le cas linéaire et le cas linéaire à gauche.

Lemme 2.7. *Soient $\bar{s} \in \mathcal{T}(\mathcal{F}^{\mathbb{N}} \cup \mathcal{G}, \mathcal{V}), \mathcal{H} \subseteq \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ et $n, m \in \mathbb{N}$. Nous avons*

$$(\bar{s} \odot_{\setminus\mathcal{H}} n) \odot_{\setminus\mathcal{H}} m = (\bar{s} \odot_{\setminus\mathcal{H}} m) \odot n = \bar{s} \odot_{\setminus\mathcal{H}} \max(n, m).$$

Lemme 2.8. *Soient* $\overline{s} \in \mathcal{T}(\mathcal{F}^{\mathbb{N}} \cup \mathcal{G}, \mathcal{V})$*,* $u \in \mathcal{P}\mathsf{os}(s)$*,* $n \in \mathbb{N}$*. Nous avons*

$$\overline{s} \odot_{\setminus \mathcal{H}} n/u = \overline{s}/u \odot_{\setminus \mathcal{H}} (\mathsf{Card}(\mathcal{P}\mathsf{os}_{\setminus \mathcal{H}}{}^{\prec u}(\overline{s})) + n).$$

Lorsque $\mathcal{H}$ est fixé, ou lorsqu'il est vide, on note simplement $\odot$ au lieu de $\odot_{\setminus \mathcal{H}}$.

Exemple 2.9. *Soit*

$$\overline{s} = \mathsf{f}^0(\mathsf{f}^2(E(\mathsf{a}^1, y))).$$

Le terme $\overline{s} \odot_{\setminus \{E\}} n$ *s'obtient à partir du terme* $\overline{s}$ *en prenant pour chaque symbole de* s *pouvant recevoir une marque (c'est-à-dire qui appartient à* $\mathcal{F} = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{f}\}$*), le maximum entre la marque sur* $\overline{s}$ *et* $m + n$ *où* m *est le nombre de symboles appartenant à* $\mathcal{F}$ *qui figurent au-dessus de cette marque. Ainsi, nous obtenons*

$$\overline{s} \odot_{\setminus \{E\}} 0 = \mathsf{f}^0(\mathsf{f}^2(E(\mathsf{a}^2, y))).$$

Le symbole f *situé à la racine reçoit la marque* 0 *qui correspond au maximum entre la marque située sur ce même* f *dans* $\overline{s}$ *(la marque* 0*), et le nombre de symboles figurant au-dessus de la racine et appartenant à* $\mathcal{F}$ *(qui est* 0*). Le symbole* f *dans* $\overline{s}$ *à la position* 0 *était marqué par* 2*, et il y a un symbole appartenant à* $\mathcal{F}$ *situé au-dessus de ce symbole. Il reste donc marqué par* 2*. Le symbole* a *dans* $\overline{s}$ *à la position* 000 *était marqué par* 1 *dans* $\overline{s}$*, et il y a deux symboles appartenant à* $\mathcal{F}$ *situés au-dessus de ce symbole. Il est donc marqué par* 2 *dans* $\overline{s} \odot_{\setminus \{E\}} 0$*. Rappelons que le symbole* E *et les variables ne sont pas marqués. Nous obtenons aussi*

$$\overline{s} \odot_{\setminus \{E\}} 1 = \mathsf{f}^1(\mathsf{f}^2(E(\mathsf{a}^3, y))).$$

Le symbole f *situé à la racine reçoit la marque* 1 *qui correspond au maximum entre la marque située sur ce même* f *dans* $\overline{s}$*, et* $m+1$*, où* $m = 0$ *est le nombre de symboles figurant au-dessus de la racine et appartenant à* $\mathcal{F}$*. Le symbole* a *dans* $\overline{s}$ *à la position* 000 *est marqué par* $m' + 1$*, où* $m' = 2$ *est le nombre de symbole figurant au-dessus de cette position et appartenant à* $\mathcal{F}$*. Il est donc marqué par* 3*. Le symbole* f *dans* $\overline{s}$ *à la position* 0 *était marqué par* 2*, et il y a un symbole appartenant à* $\mathcal{F}$ *situé au-dessus de ce symbole. Il reste donc marqué par* 2*.*

Étant données deux versions marquées d'un même terme $\overline{s}$ et $\widetilde{s}$, nous noterons $\boldsymbol{\overline{s} \preceq_{\mathsf{m}} \widetilde{s}}$ si pour tout $u \in \mathcal{P}\mathsf{os}(s)$

$$\mathsf{m}(\overline{s}/u) \leq \mathsf{m}(\widetilde{t}/u).$$

2.8 Les systèmes de réécriture de termes

Vous pouvez consulter [87] pour plus d'informations sur l'utilisation en informatique, en mathématiques et en logique des systèmes de réécriture de termes. Soit $\mathcal{F}$ une signature. Une **règle de réécriture** sur une $\mathcal{F}$ est une paire $l \to r$ de termes de $\mathcal{T}(\mathcal{V})$ qui satisfait $\mathcal{V}\mathsf{ar}(r) \subseteq \mathcal{V}\mathsf{ar}(l)$. Nous appelons l le **membre gauche** de la règle, et r le **membre droit** de la règle. Une **règle est linéaire** lorsque l et r sont linéaires. Une règle est **linéaire à gauche** si l est linéaire, et **linéaire à droite** si r est linéaire. Un **système de réécriture de termes** (où *SRT* en abrégé) est une paire $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ où $\mathcal{F}$ est une signature et $\mathcal{R}$ un ensemble fini de règles de réécriture sur $\mathcal{F}$. Nous omettrons parfois la signature lorsque cela est clair, et noterons juste $\mathcal{R}$ et non $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$. Nous noterons $\mathbf{LHS}(\mathcal{R})$ l'ensemble des membres gauches des règles de $\mathcal{R}$, et $\mathbf{RHS}(\mathcal{R})$ l'ensemble des membres droits de $\mathcal{R}$. Un SRT est **linéaire** (resp. **linéaire à gauche**, resp. **linéaire à droite**) si toutes ses règles sont linéaires (resp. linéaires à gauche, resp. linéaires à droite). La réécriture est définie de manière habituelle : pour tous termes clos $s, t \in \mathcal{T}$ il y a un **pas de réécriture** de s vers t dans $\mathcal{R}$ noté

$$s \to_{\mathcal{R}} t$$

s'il existe une position $v \in \mathcal{P}\mathsf{os}(s)$, une règle $l \to r \in \mathcal{R}$, et une substitution σ telles que

$$s = s[l\sigma]_v \text{ et } t = s[r\sigma]_v.$$

Nous préciserons parfois la règle, la position, et la substitution utilisées et noterons

$$s \to_{\mathcal{R}, l \to r, v, \sigma} t.$$

Le terme $l\sigma$ est un **redex** de s et $r\sigma$ est le **contractum** de $l\sigma$. Nous notons $\boldsymbol{\to^+_{\mathcal{R}}}$ la clôture transitive de $\to$, et $\boldsymbol{\to^*_{\mathcal{R}}}$ la clôture réflexive et transitive de $\to_{\mathcal{R}}$. Nous dirons qu'il existe une **dérivation de s vers t** si $s \to^*_{\mathcal{R}} t$. La **longueur** d'une dérivation est le nombre de pas de cette dérivation. Nous notons $\boldsymbol{s \to^n_{\mathcal{R}} t}$ une dérivation de longueur n. Une **dérivation infinie** qui part de s est une suite de termes $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $s_0 = s$ et pour tout $i \in \mathbb{N}$

$$s_i \to_{\mathcal{R}} s_{i+1}.$$

Lorsqu'il n'existe pas de telle suite, on dit que le système $\mathcal{R}$ **termine sur s**. Un système **termine uniformément** (u-termine) s'il termine sur tous les termes. À toute classe $\mathcal{C}$ de SRT on associe deux problèmes de terminaison : le problème de la **terminaison**, et le problème de la **terminaison uniforme** (u-terminaison). Le problème de la terminaison est décidable pour la classe $\mathcal{C}$ s'il existe un programme qui peut décider pour tout système $\mathcal{R} \in \mathcal{C}$ et tout terme $s \in \mathcal{T}$ si $\mathcal{R}$ termine sur s. Le problème de la u-terminaison est décidable pour la classe $\mathcal{C}$ s'il existe un programme qui peut décider pour tout système $\mathcal{R} \in \mathcal{C}$ s'il u-termine. Nous avons aussi la notion de **dérivation inverse infinie** (dérivation i-infinie) qui part de s : c'est une suite de termes $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $s_0 = s$ et pour tout $i \in \mathbb{N}$

$$\overline{s_{i+1}} \to_{\mathcal{R}} \overline{s_i}.$$

De même, nous définissons pour toute classe $\mathcal{C}$ de SRT le problème de **l'inverse terminaison** (i-terminaison), et le problème de l'inverse-terminaison uniforme (i-u-terminaison).

Exemple 2.10. *Nous réutiliserons les systèmes introduits ici dans les exemples suivants. Soient*

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_0 &= \{\mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) \to \mathsf{f}(x)\},\\
\mathcal{R}_1 &= \{\mathsf{f}(x) \to \mathsf{g}(x), \mathsf{g}(\mathsf{i}(x)) \to \mathsf{i}(x), \mathsf{i}(x) \to \mathsf{a}\},\\
\mathcal{R}_2 &= \{\mathsf{f}(x) \to \mathsf{h}(x,x), \mathsf{a} \to \mathsf{b}\},\\
\mathcal{R}_3 &= \{\mathsf{f}(x) \to \mathsf{g}(x), \mathsf{g}(\mathsf{i}(x)) \to \mathsf{a}\},\\
\mathcal{R}_4 &= \{\mathsf{f}(\mathsf{g}(x)) \to \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{i}(x))), \mathsf{i}(x) \to \mathsf{g}(x)\},\\
\mathcal{R}_5 &= \{\mathsf{h}(\mathsf{f}(\mathsf{f}(x)), \mathsf{i}(\mathsf{i}(y))) \to \mathsf{h}(\mathsf{f}(x), \mathsf{i}(y))\},\\
\mathcal{R}_6 &= \{x \to \mathsf{h}(x, \mathsf{a}), \mathsf{f}(x) \to \mathsf{i}(x)\}.
\end{aligned}$$

Les systèmes $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_3$, $\mathcal{R}_4$, $\mathcal{R}_5$ et R_6 sont linéaires. Le système $\mathcal{R}_2$ est linéaire à gauche. Nous avons un pas de réécriture

$$\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{a})) \to_{\mathcal{R}_0,\epsilon,\mathsf{f}(\mathsf{f}(x)))\to\mathsf{f}(x),\sigma:x\mapsto\mathsf{a}} \mathsf{f}(\mathsf{a}).$$

Le système $\mathcal{R}_0$ u-termine. Par contre, il ne i-u-termine pas. Il existe une dérivation i-infinie qui part de $\mathsf{f}(\mathsf{a})$

$$\ldots \to_{\mathcal{R}_0,\epsilon} \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{a}))) \to_{\mathcal{R}_0,\epsilon} \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{a})) \to_{\mathcal{R}_0,\epsilon} \mathsf{f}(\mathsf{a}).$$

Le système $\mathcal{R}_1$ u-termine. Il ne i-u-termine pas (on obtient une dérivation i-infinie en utilisant la règle $\mathsf{g}(\mathsf{i}(x)) \to \mathsf{i}(x)$). Le système $\mathcal{R}_2$ u-termine et i-u-termine. Le système $\mathcal{R}_3$ u-termine et i-u-termine. Le système $\mathcal{R}_4$ i-u-termine, mais n'u-termine pas. Il y a une dérivation infinie qui part de $\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{a}))$.

$$\begin{aligned}&\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{a})) \to_{\mathsf{f}(\mathsf{g}(x),\epsilon)\to\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{i}(x)))} \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{i}(\mathsf{a}))) \to_{\mathsf{i}(x)\to\mathsf{g}(x),00} \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{a})))\\ &\quad\to_{\mathsf{f}(\mathsf{g}(x),00)\to\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{i}(x)))} \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{i}(\mathsf{a})))) \ldots\end{aligned}$$

Le système R_5 u-termine mais ne i-u-termine pas. Le système $\mathcal{R}_6$ ne termine sur aucun terme, et u-inverse termine.

2.9 Stratégie de réécriture

Une **stratégie de réécriture** p est définie pour une classe de systèmes $\mathcal{C}$. C'est une restriction de la relation de dérivation définie pour tous les systèmes $\mathcal{R} \in \mathcal{C}$. Une dérivation donnée pour un système $\mathcal{R}$ respecte ou ne respecte pas p. L'ensemble des dérivations qui respectent p est noté ${}_p\to^*_{\mathcal{R}}$. C'est un sous-ensemble de $\to^*_{\mathcal{R}}$. Si pour tout système $\mathcal{R} \in \mathcal{C}$, ${}_p\to^*_{\mathcal{R}} =\to^*_{\mathcal{R}}$, alors nous disons que la stratégie n'est pas restrictive. Dans le cas contraire, nous dirons que p est restrictive. À chaque stratégie, est associée une classe de système $P \subseteq \mathcal{C}$: un système $\mathcal{R}$ appartient à P si toute dérivation $s \to^*_{\mathcal{R}} t$ peut être remplacée par une dérivation respectant p $s_p \to^*_{\mathcal{R}} t$. Parmi les stratégies que nous allons définir, il y en a une, **la stratégie de bas en haut** (bh) qui n'est pas restrictive pour les systèmes de réécriture de termes linéaires à gauche. Nous définissons pour toute stratégie p et toute classe $\mathcal{C}$ de systèmes linéaires à gauche, la sous-classe $FP \subseteq P$ des **systèmes fortement *p*** : un système est fortement p si toute dérivation bh respecte la stratégie p. Si P est restrictive, $FP \subset P$. De nombreuses stratégies ont déjà été définies. Parmi les plus connues, la stratégie innermost, la stratégie outermost, et leurs variantes (voir [87], ou [74]). Un pas de réécriture est innermost si le redex correspondant appliqué ne contient pas de sous-redex propre. Une dérivation est innermost si tous les pas sont innermost. Cette stratégie a été largement étudiée, et permet d'obtenir des résultats de terminaison ([52],[45], [36],[89],[2], [88]), de normalisation ([5]), ou encore d'accessibilité ([51], [66]). Nous verrons que dans le cas linéaire, toute dérivation innermost est bh. Par contre, une dérivation bh n'est pas nécessairement innermost.

2.10 Les mots vu comme des termes

Une **règle de réécriture de mots** sur un alphabet A est une paire de mots $l \to r$. Un **système de réécriture de mots** (historiquement système de semi-Thue) est une paire (S, A) où A est un alphabet et S un ensemble fini de règles de réécriture de mots sur A. La réécriture de mots est définie de manière habituelle : pour tous mots $s, t \in A^*$ il y a un **pas de réécriture** de s vers t

$$s \to_S t$$

s'il existe une règle $l \to r \in S$, et deux mots $\alpha, \beta \in A^*$ tels que

$$s = \alpha \cdot l \cdot \beta \text{ et } t = \alpha \cdot r \cdot \beta.$$

Nous notons $\to_S^*$ la clôture réflexive et transitive de $\to_S$. Nous dirons qu'il existe une **dérivation de s vers t** si $s \to_S^* t$. Nous allons montrer que tout système de réécriture de mots peut être vu comme un système de réécriture de termes $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$. Soit

$$A = \{a_1, \dots, a_n\} \text{ et } S = \{l_1 \to r_1, \dots, l_p \to r_p\}.$$

Soit $\mathcal{F} = \{a'_1, \dots, a'_n, \#\}$, avec $a'_1, \dots, a'_n$ des symboles unaires et $\#$ un symbole de constante. Soit x une variable. Étant donné un mot $m = m_1 \dots m_q$ (avec $m_1, \dots, m_q \in A$), nous notons m_x le terme

$$m_x = m'_1(m'_2(\dots(m_q(x)))),$$

et $m_\#$ le terme

$$m_\# = m'_1(m'_2(\dots(m_q(\#)))).$$

Soit

$$\mathcal{R} = \{l_x \to r_x \mid l \to r \in S\}.$$

Avec ces notations, nous avons l'équivalence suivante :

$$s \to_{S, l \to r} t \Leftrightarrow s_\# \to_{\mathcal{R}, l_x \to r_x} t_\#.$$

Nous considérerons donc fréquemment le système de réécriture de termes $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ à la place du système de réécriture de mots (S, A). Nous nous autoriserons ainsi à dire qu'une classe de systèmes de réécriture de mots est incluse dans une classe de systèmes de réécriture de termes linéaire.

Exemple 2.11. *Soit $A = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$ et $S = \{\mathsf{ab} \to \mathsf{b}\}$. Le système (S, A) est équivalent au système $(\mathcal{R} = \{\mathsf{a}'(\mathsf{b}'(x)) \to \mathsf{b}'(x)\}, \mathcal{F} = \{\mathsf{a}', \mathsf{b}', \#\})$ avec a' et b' des symboles unaires et $\#$ un symbole de constante. Nous avons le pas de réécriture de mots suivant*

$$\mathsf{aabaa} \to_{\mathsf{ab} \to \mathsf{b}} \mathsf{abaa}$$

qui est en correspondance avec le pas de réécriture de termes

$$\mathsf{a}'(\mathsf{a}'(\mathsf{b}'(\mathsf{a}'(\mathsf{a}'(\#))))) \to_{\mathsf{a}'(\mathsf{b}'(x)) \to \mathsf{b}'(x), 0} \mathsf{a}'(\mathsf{b}'(\mathsf{a}'(\mathsf{a}'(\#)))).$$

2.11 Origine

Nous introduisons ici la notion **d'origine** pour une position dans une dérivation. Soit $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ un *SRT* linéaire à gauche, et soit

$$d : t_0 = t_0[l_0\sigma_0]_{v_0} \to_\mathcal{R} t_1 = t_0[r_0\sigma_0]_{v_0} \to_\mathcal{R} \dots \to_\mathcal{R} t_n = t_{n-1}[r_{n-1}\sigma_{n-1}]_{v_{n-1}}$$

une dérivation dans $\mathcal{R}$. Soient $i \in \{1, \dots, n\}$ et $u \in \mathcal{P}\mathsf{os}(t_i)$. Nous distinguons trois cas pour définir $\mathbf{org}_{d,i}(u)$ l'origine de u dans t_{i-1} :

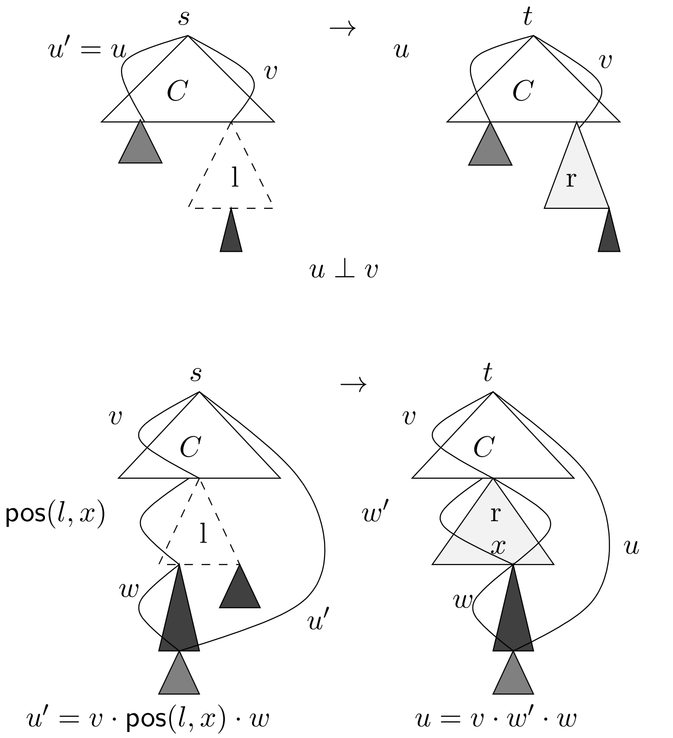

FIGURE 1 – Origine : $u' = \mathsf{Org}_{s \to t,1}(u)$.

— Si $u \prec v_{i-1}$ ou $u \perp v_{i-1}$ alors $\mathsf{org}_{d,i}(u)$ est définie, appartient à $\mathcal{P}\mathsf{os}(t_{i-1})$ et $\mathsf{org}_{d,i}(u) = u$.

— S'il existe $x \in \mathcal{V}\mathsf{ar}(r_{i-1})$, $w' \in \mathcal{P}\mathsf{os}(r_{i-1}, x)$, et $w \in \mathcal{P}\mathsf{os}(x\sigma_{i-1})$ tels que $u = v_{i-1} \cdot w' \cdot w$, alors $\mathsf{org}_{d,i}(u)$ est définie, appartient à $\mathcal{P}\mathsf{os}(t_{i-1})$ et $\mathsf{org}_{d,i}(u) = v_{i-1} \cdot \mathsf{pos}(l_{i-1}, x) \cdot w$.

— Sinon, $\mathsf{org}_{d,i}(u)$ n'est pas définie.

Nous omettrons d dans la notation de cette fonction et noterons $\mathsf{org}_i(u)$ lorsque cela est clair. Nous pouvons considérer l'origine org_i comme une fonction partielle de $\mathcal{P}\mathsf{os}(t_i)$ vers $\mathcal{P}\mathsf{os}(t_{i-1})$. Notons que par définition, $\mathsf{root}(t_{i-1}/\mathsf{org}_i(u)) = \mathsf{root}(t_i/u))$.
Si une position u a une origine dans t_{i-1}, et que cette origine a elle même une origine dans t_{i-2}, alors nous la notons $\mathsf{org}^2_{d,i}(u)$ et nous disons que c'est l'origine de u dans t_{i-2}. Nous pouvons poursuivre ce raisonnement et définir pour tous $0 \leq j \leq i \leq n$, et pour tout $u \in \mathcal{P}\mathsf{os}(t_i)$ des fonctions partielles $\mathsf{org}^j_{d,i} : \mathcal{P}\mathsf{os}(t_i) \to \mathcal{P}\mathsf{os}(t_{i-j})$ par : pour tout $u \in \mathcal{P}\mathsf{os}(t_i)$

— Si $j = 0$: $\mathsf{org}^j_{d,i}(u) = u$,

— sinon $\mathsf{org}^j_{d,i}(u)$ est définie lorsque la fonction

$$\mathsf{org}_{i-j+1}(\mathsf{org}_{i-j+2}(\ldots(\mathsf{org}_i(u))))$$

est définie et si cette fonction est définie pour u, alors $\boldsymbol{u}$ **a pour origine**

$\mathbf{org}_{i-j+1}(\ldots(\mathbf{org}_i(u)))$ **dans** t_{i-j}, i.e

$$\mathsf{org}_i^j(u) := \mathsf{org}_{i-j+1}(\mathsf{org}_{i-j+2}(\ldots(\mathsf{org}_i(u)))).$$

Exemple 2.12. *Considérons le système* $\mathcal{R}_4 = \{\mathsf{f}(\mathsf{g}(x)) \to \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{i}(x))), \mathsf{i}(x) \to \mathsf{g}(x)\}$ *et la dérivation suivante*

$$s_0 = \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{a})) \to_{\epsilon,\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))\to\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{i}(x)))} s_1 = \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{i}(\mathsf{a}))) \to_{00,\mathsf{i}(x)\to\mathsf{g}(x)} s_2 = \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{a}))).$$

La position 000 *dans* s_2 *a pour origine* 000 *dans* s_1*. Son origine dans* s_0 *est* 00*. La position* 00 *dans* s_2 *n'a pas d'origine dans* s_1 *et donc pas d'origine dans* s_0*. La position* 0 *dans* s_2 *a pour origine* 0 *dans* s_1*. Elle n'a pas d'origine dans* s_0*. La position* ϵ *dans* s_2 *a pour origine* ϵ *dans* s_1*, et n'a pas d'origine dans* s_0*.*

2.12 Automates de termes

2.12.1 Automates de termes de bas en haut

Définition 2.13 (Automate de termes de bas en haut)**.** *Un* **automate fini de termes de bas en haut** *(ou simplement automate)* $\mathcal{A}$ *est un* 4*-uple* $\mathcal{A} := (\mathcal{F}, \mathcal{Q}, \mathcal{Q}_f, \Gamma)$ *où* $\mathcal{F}$ *est une signature finie,* $\mathcal{Q}$ *est un ensemble fini d'états vérifiant* $\mathcal{Q} \cap \mathcal{F}_0 = \emptyset$*,* $\mathcal{Q}_f \subseteq \mathcal{Q}$ *est un ensemble d'états finaux, et* $(\mathcal{F} \cup \mathcal{Q}, \Gamma)$ *est un SRT dont les règles de* Γ *sont de la forme :*

$$f(q_1, \ldots, q_n) \to q, n \geq 0, f \in \mathcal{F}_n, q_1, \ldots, q_n, q \in \mathcal{Q}.$$

Un terme clos $s \in \mathcal{T}$ *est* **accepté** *par l'automate* $\mathcal{A}$ *si* $s \to_{\mathcal{A}}^{+} \mathcal{Q}_f$*. Le* **langage accepté** *par* $\mathcal{A}$ *noté* $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ *est l'ensemble des termes acceptés par* $\mathcal{A}$ *:*

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) := \{s \in \mathcal{T} \mid s \to_{\mathcal{A}}^{+} \mathcal{Q}_f\}.$$

Un automate est **déterministe** *s'il n'y a pas deux règles de* Γ *ayant le même membre gauche. Un automate est* **complet** *(sur* $\mathcal{F}$*) si pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, pour tout* $f \in \mathcal{F}_n$ *et tous* $q_1, \ldots, q_n \in \mathcal{Q}$*, il y a toujours au moins une règle* $f(q_1, \ldots, q_n) \to q \in \Gamma$*.*

Définition 2.14 (Language reconnaissable)**.** *Soit* $\mathcal{F}$ *une signature. Un langage* $T \subseteq \mathcal{T}$ *est* **reconnaissable** *s'il existe un automate* $\mathcal{A}$ *tel que* $T = \mathcal{L}(\mathcal{A})$*. L'ensemble des langages reconnaissables est noté* $\mathsf{Rec}(\mathcal{F})$*.*

Remarque 2.15. *Sur les mots assimilés à des termes* $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ *(voir section 2.10), un automate a pour états un ensemble* $\mathcal{Q} = (\mathcal{G}_1 \cup \{\#\})$ *et une règle de* Γ *est soit de la forme*

$$f(\#) \to f \text{ pour } f \in \mathcal{F}\backslash\{\#\}$$

soit de la forme

$$f \cdot q_1 \to q \text{ pour } q_1, q \in \mathcal{Q}\backslash\{\#\}, f \in \mathcal{F}\backslash\{\#\}.$$

Ainsi, un tel automate ne peut reconnaître que des termes unaires ayant pour feuille $\#$*. Et si l'on retourne au système de réécriture* M*, les règles obtenues sont de la forme*

$$f(q_1) \to q \text{ pour } q_1, q \in \mathcal{Q}', f \in A,$$

(où $\mathcal{Q}'$ *est l'alphabet correspondant à* $\mathcal{G}_1$*), et on retrouve la notion classique d'automate de mots et de langage rationnel.*

Nous allons maintenant définir la notion de réduit d'un terme pour un automate déterministe pouvant être incomplet.

Définition 2.16 (Sous-domaine accessible)**.** *Soit t un terme et $\mathcal{A}$ un automate. Un sous-domaine D de $Pos(t)$ est un* **sous-domaine accessible** *de $\mathcal{P}\mathsf{os}(t)$ par $\mathcal{A}$ s'il existe un terme t' tel que $\mathcal{P}\mathsf{os}(t') = D$ et $t \to_{\mathcal{A}}^{*} t'$.*

Définition 2.17 (Réduit d'un terme)**.** *Soient $\mathcal{A} = (\mathcal{F}, \mathcal{Q}, \mathcal{Q}_f, \Gamma)$ un automate déterministe, $t \in \mathcal{T}(\mathcal{V})$ un terme, et D un sous-domaine accessible de $\mathcal{P}\mathsf{os}(t)$ par $\mathcal{A}$. Le* **réduit de t à D** *noté $\mathsf{Red}_{\mathcal{A}}(t, D)$ est l'unique terme tel que :*

- *$\mathcal{P}\mathsf{os}(\mathsf{Red}_{\mathcal{A}}(t, D)) = D$,*
- *$t \to_{\mathcal{A}}^{*} \mathsf{Red}_{\mathcal{A}}(t, D)$,*
- *pour tout t' tel que $\mathcal{P}\mathsf{os}(t') = D$ et $t \to_{\mathcal{A}}^{*} t'$, $t' \to_{\mathcal{A}}^{*} \mathsf{Red}_{\mathcal{A}}(t, D)$.*

Remarquons que dans cette définition, nous avons considéré le système de réécriture $(\mathcal{F} \cup \mathcal{Q} \cup \mathcal{V}, \Gamma)$ sur la signature $\mathcal{F} \cup \mathcal{Q} \cup \mathcal{V}$ au lieu de le considérer sur la signature $\mathcal{F} \cup \mathcal{Q}$, et nous considérons donc que l'automate peut agir sur des termes contenant des variables. Toutefois, aucune règle ne s'appliquant a une variable, un domaine accessible d'un terme t contient nécessairement toutes les branches se finissant par une variable, c'est-à-dire toutes les positions $u \in \mathcal{P}\mathsf{os}^{\prec w}(t)$ où $w \in \mathcal{L}\mathsf{v}(t) \cap \mathcal{V}$. L'unicité de $\mathsf{Red}_{\mathcal{A}}(t, D)$, lorsqu'il existe, est garantie par le caractère déterministe de l'automate. Si $\mathcal{A}$ est complet, le réduit d'un terme clos t est bien défini pour tout sous-domaine D de $\mathcal{P}\mathsf{os}(t)$. Lorsque $\{\epsilon\}$ est un sous-domaine accessible de $\mathcal{P}\mathsf{os}(t)$ par $\mathcal{A}$, nous notons $t \downarrow_{\mathcal{A}}$ le réduit de t à ϵ. Si l'automate est déterministe et complet, $t \downarrow_{\mathcal{A}}$ existe toujours lorsque t est clos.

2.12.2 Automates sur une signature marquée

Dans cette section, $\mathcal{A} := (\mathcal{F} \cup \mathcal{G}, \mathcal{Q}, \mathcal{Q}_f, \Gamma)$ est un automate qui reconnaît un langage $T \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{F} \cup \mathcal{G})$. Nous allons maintenant étendre $\mathcal{A}$ pour le faire agir sur les termes marqués de $\mathcal{T}(\mathcal{F}^{\mathbb{N}} \cup \mathcal{G})$. Cet automate fonctionne comme $\mathcal{A}$, mais sur la signature marquée, et ne tient en fait aucun compte des marques.

Définition 2.18 (Automate marqué associé)**.** *Soit $k, k' \in \mathbb{N}$, $k \leq k'$.* **L'automate marqué $\mathcal{A}_{\mathcal{G}}{}^{k,k'}$** *est l'automate*

$$\mathcal{A}_{\mathcal{G}}{}^{k,k'} := (\mathcal{F}^{k,k'} \cup \mathcal{G}, \mathcal{Q}, \mathcal{Q}_f, \Gamma^{k,k'}),$$

où $\Gamma^{k,k'}$ est l'ensemble de règles :

$$\begin{aligned}\Gamma^{k,k'} :=& \Gamma \cup \{f^i(q_0, \ldots, q_{n-1}) \to q \mid i \in \{k \ldots k'\}, n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, \\ & f(q_0, \ldots, q_{n-1}) \to q \in \Gamma\}\end{aligned}$$

Pour tout entier k, nous noterons $\mathcal{A}_{\mathcal{G}}{}^{\leq k}$ l'automate $\mathcal{A}_{\mathcal{G}}{}^{0,k}$.

Pour tous entiers k_0, k_0', k_1, k_1' tels que $k_0 \leq k_0'$ et $k_1 \leq k_1'$, $\mathcal{A}^{k_0,k_0'}$ et $\mathcal{A}^{k_1,k_1'}$ ont le même comportement sur les termes ayant des marques entre $\max(k_0, k_1)$ et $\min(k_0', k_1')$. Nous noterons donc $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ n'importe quel automate $\mathcal{A}^{\leq k}$ avec un k suffisamment grand par rapport aux marques des termes considérés, et nous noterons $\mathcal{A}^{\geq k'}$ n'importe quel automate $\mathcal{A}^{k',k}$ avec un k suffisamment grand par rapport aux marques des termes considérés.

Remarque 2.19. *Si l'automate $\mathcal{A}$ est déterministe, alors $\mathcal{A}^{k,k'}$ est déterministe (sur $\mathcal{F}^{k',k'} \cup \mathcal{G}$). De même si $\mathcal{A}$ est complet, $\mathcal{A}^{k,k'}$ est complet.*

Par définition pour toute version marquée $\bar{t}$, $\bar{t} \downarrow_{\mathcal{A}^{\mathbb{N}}} = t \downarrow_{\mathcal{A}}$ lorsque $t \downarrow_{\mathcal{A}}$ existe. De même, le langage reconnu par $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ est $\{\bar{t} \in \mathcal{T}(\mathcal{F}^{\mathbb{N}} \cup \mathcal{G}) \mid t \in T\}$.

2.13 Langage algébrique

Une **grammaire algébrique** G est un quadruplet $G = (N, A, S, M)$, où

— N est un ensemble fini de non-terminaux,

— A est un ensemble disjoint de N de symboles terminaux (ou lettres),

— S est l'élément de départ (ou axiome),

— M est un système de réécriture de mots (ou ensemble de règles de production) dont les règles sont de la forme $X \to w$, pour $X \in N$ et $w \in (N \cup A)^*$.

Le langage engendré par la grammaire G et un non terminal $P \in N$ noté $\mathcal{L}(G(P))$ est l'ensemble des mots $m \in \mathsf{A}^*$ tels que $P \to^*_{\mathsf{Gr}} m$. Le **langage engendré par la grammaire G** noté $\mathcal{L}(G)$ est l'ensemble $\mathcal{L}(G(S))$. Nous définirons une grammaire algébrique pour simuler les dérivations $\mathsf{bo}(0)$ dans le chapitre 4. Un **langage est algébrique** s'il existe une grammaire algébrique qui l'engendre.

2.14 Langage indexé

Les **grammaires indexées** ont été introduites dans [1]. Ces grammaires génèrent les **langages indexés** qui sont une extension des langages algébrique. Nous reprenons la définition de Aho.

Définition 2.20. *Une grammaire indexée $\mathcal{G} = (N, T, F, P, S)$ est un quintuplé où*

— *N est un ensemble fini non vide de symboles appelés non-terminaux,*

— *T est un ensemble fini de symboles appelés terminaux,*

— *F est un ensemble fini de paires ordonnées de la forme (A, ϕ), avec $A \in N$, et $\phi \in (N \cup T)^*$. Nous noterons $A \to \phi$ une telle paire, et parlerons de règles de production d'index.*

— *P est un ensemble fini de paires ordonnées de la forme (A, α), avec $A \in N$, et $\alpha \in (NF^* \cup T)^*$. Nous noterons $A \to \alpha$ une telle paire et parlerons de règle de production.*

— *S est un symbole de N appelé symbole de départ.*

Un mot $\alpha \in (NF^* \cup T)^*$ se réécrit en un mot $\beta \in (NF^* \cup T)^*$ s'il existe $\alpha_1, \beta_1 \in (NF^* \cup T)^*$, $A \in N$, $\tau_1, \ldots, \tau_k, \eta_1, \ldots, \eta_k, \zeta \in F^*$, $X_1, \ldots, X_k \in N \cup T$, tels que l'un de ses deux cas se présentent :

1. *(a)* $\alpha = \alpha_1 \cdot A \cdot \zeta \cdot \beta_1$,

   (b) $\beta = \alpha_1 \cdot X_4 \cdot \tau_1 \cdot X_2 \cdot \tau_2 \ldots X_k \cdot \tau_k \cdot \beta_1$,

   (c) $A \to X_1 \cdot \eta_1 \cdot X_2 \cdot \eta_2 \ldots X_4 \cdot \eta_k \in P$,

   (d) pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, $\tau_i = \eta_i \cdot \zeta$ *si* $X_i \in N$, *et* $\tau_i = \epsilon$ *si* $X_i \in T$,

   ou

2. *(a)* $\alpha = \alpha_1 \cdot A \cdot \zeta \cdot \beta_1$,
   (b) $\beta = \alpha_1 \cdot X_4 \cdot \tau_1 \cdot X_2 \cdot \tau_2 \ldots X_k \cdot \tau_k \cdot \beta_1$,
   (c) $A \to X_1 \cdot X_3 \ldots X_k \in F$,
   (d) *pour tout* $i \in \{1, \ldots, k\}$, $\tau_i = \zeta$ *si* $X_i \in N$, *et* $\tau_i = \epsilon$ *si* $X_i \in T$.

Le langage engendré par $\mathcal{G}$ *est l'ensemble des mots* $m \in T^*$ *tels que* $S \to_{\mathcal{G}}^* m$. *Un langage indexé est un langage qui peut être engendré par une grammaire indexée.*

Nous utiliserons une seule propriété relative aux langages indexés. Cette propriété sera rappelée dans la section suivante.

2.15 Transduction rationnelle

Nous allons maintenant introduire les transductions rationnelles. Ces transductions ont été introduites dans [35]. Le lecteur peut par exemple se référer à [8] pour une présentation plus complète. Nous présenterons ici les transductions rationnelles comme étant les relations reconnues par un transducteur fini. Un transducteur fini est une généralisation des automates à états qui permet de les faire agir sur des couples de mots. Un transducteur fini fonctionne comme un automate fini, excepté qu'il a deux bandes. La première lui sert à lire le mot en entrée, et la deuxième à écrire le mot en sortie.

Définition 2.21. *Soit* A, B *deux alphabets. Un transducteur fini* $\mathcal{A} = (A, B, \mathcal{Q}, q_I, \mathcal{Q}_f, \delta)$ *est un sextuple où*

— A *est l'alphabet d'entrée,*
— B *est l'alphabet de sortie,*
— $\mathcal{Q}$ *est un ensemble fini d'état,*
— q_I *est l'état initial,*
— $\mathcal{Q}_f \subseteq \mathcal{Q}$ *est l'ensemble des états acceptants,*
— $\delta \subseteq Q \times A^* \times B^* \times Q$ *est la fonction de transition.*

Un couple de mots $(s, t) \in A^* \times B^*$ *est accepté par le transducteur* $\mathcal{A}$ *s'il existe* $u_0, \ldots, u_n \in A^*$, $v_0, \ldots, v_n \in B^*$ *tels que*

— $u = u_0 \ldots u_n$, $v = v_0 \ldots v_n$,
— $\exists q_1, \ldots, q_n \in \mathcal{Q}$, $q_f \in \mathbb{Q}_f$, *tels que*

$$(q_I, u_0, v_0, q_1) \in \delta, \forall i \in \{1, \ldots, n{-}1\}, (q_i, u_i, v_i, q_{i+1}) \in \delta, (q_n, u_n, v_n, f_f) \in \delta.$$

L'ensemble des couples de mots acceptés par $\mathcal{A}$ *est noté* $\mathcal{L}(\mathcal{A})$. *Une relation* $\mathcal{R} = \mathcal{A}^* \times \mathcal{B}^*$ *est une* **transduction rationnelle** *si elle est reconnue par un transducteur fini, i.e. s'il existe un transducteur fini* $\mathcal{A}$ *tel que* $\mathcal{R} = \mathcal{L}(\mathcal{A})$. *Si* $L \subseteq A^*$ *est un langage algébrique, l'image directe de* L *par une transduction rationnelle* $\mathcal{R}$ *(i.e.* $L' = \{b \in \mathcal{B}^* \mid \exists a \in L, (a, b) \in \mathcal{R}\}$*) est un langage algébrique. De même, si* L *est un langage indexé, l'image directe par une transduction rationnelle est une langage indexé [69]. C'est la seule propriété que nous utiliserons concernant les langages indexés.*

2.16 Préservation de la reconnaissabilité et de l'algébricité

Étant donné un ensemble de termes ou de mots T et un système de réécriture de termes ou (respectivement) de mots, nous notons $\boldsymbol{[T](\to^*_{\mathcal{R}})}$ l'image directe de T par $\mathcal{R}$, c'est-à-dire l'ensemble

$$[T](\to^*_{\mathcal{R}}) := \{t \mid T \to^*_{\mathcal{R}} t\},$$

et $\boldsymbol{(\to^*_{\mathcal{R}})[T]}$ l'image inverse de T par $\mathcal{R}$, c'est-à-dire l'ensemble

$$(\to^*_{\mathcal{R}})[T] := \{t \mid s \to^*_{\mathcal{R}} T\},$$

Un système $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ **préserve la reconnaissabilité**, si pour tout $T \in \mathsf{Rec}(\mathcal{F})$ l'ensemble $[T](\to^*_{\mathcal{R}})$ est reconnaissable et peut être construit. Un système $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ **inverse-préserve la reconnaissabilité** (i-préserve la reconnaissabilité), si pour tout $T \in \mathsf{Rec}(\mathcal{F})$ l'ensemble $(\to^*_{\mathcal{R}})[T]$ est **reconnaissable et peut être construit**. Une classe de systèmes $\mathcal{C}$ **préserve la reconnaissabilité** (resp. i-préserve) si tous les systèmes de la classe préservent (resp. i-préservent) la reconnaissabilité. Nous avons imposé dans cette définition que les ensembles puissent être construits. Il existe cependant d'autres définition de l'i-préservation moins restrictives (voir par exemple [53]). Un système de réécriture de mots M préserve l'algébricité si pour tout ensemble algébrique T, l'ensemble

$$[T](\to^*_M)$$

est algébrique.

Exemple 2.22. *Le système* $\mathcal{R}_5 = \{\mathsf{h}(\mathsf{f}(\mathsf{f}(x)), \mathsf{i}(\mathsf{i}(y))) \to \mathsf{h}(\mathsf{f}(x), \mathsf{i}(y))\}$ *préserve la reconnaissabilité (nous verrons qu'il est inverse-*LBO*). Par contre, il ne i-préserve pas la reconnaissabilité. En effet, l'ensemble*

$$(\to^*_{\mathcal{R}_5})[\{\mathsf{h}(\mathsf{f}(\mathsf{a}), \mathsf{i}(\mathsf{a}))\}] = \{\mathsf{h}(\mathsf{f}(\mathsf{a}), \mathsf{i}(\mathsf{a})), \mathsf{h}(\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{a})), \mathsf{i}(\mathsf{i}(\mathsf{a}))), \ldots\}$$

n'est pas reconnaissable, alors que $\{\mathsf{h}(\mathsf{f}(\mathsf{a}), \mathsf{i}(\mathsf{a}))\}$ *l'est.*

2.17 Les systèmes clos

Un système de réécriture est **clos** si tous les termes apparaissant dans les règles sont clos. Il a été démontré dans [13] que ces systèmes i-préservent la reconnaissabilité. Nous savons aussi que les problèmes de terminaison sont tous décidables pour cette classe (voir par exemple [6]).

2.18 Les transducteurs de termes clos

Les transducteurs de termes clos ont été introduits dans [25]. Un **transducteur de termes clos** (noté TTC) est une paire $G = (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ d'automates de termes sur une même signature finie $\mathcal{F}$ (les deux automates peuvent partager des états communs). La relation engendrée par G est l'ensemble

$$\to_G = \{(t, t') \mid t, t' \in \mathcal{T}, \exists s \in \mathcal{T}(\mathcal{F} \cup (\mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2)), t \to^*_{\mathcal{A}_1} s, t' \to^*_{\mathcal{A}_2} s\}.$$

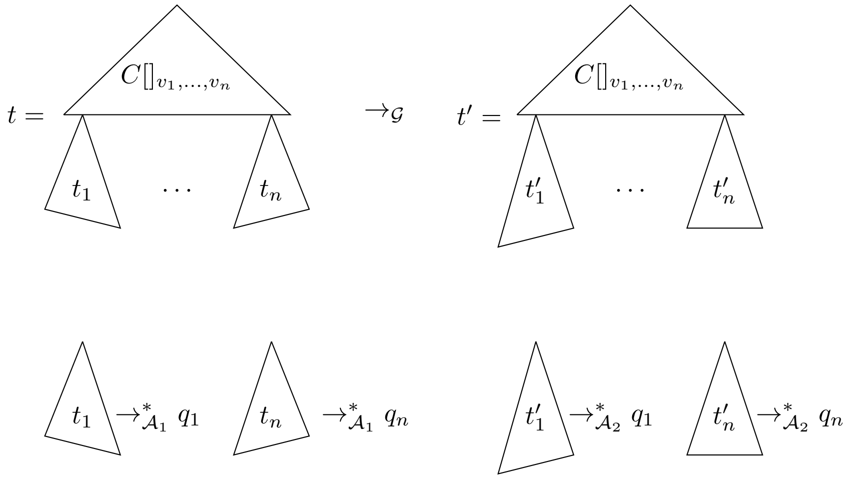

FIGURE 2 – Relation engendrée par un TTC $G = (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$.

Cette relation est représentée sur la figure 2. Un ensemble $T \subseteq \mathcal{T} \times \mathcal{T}$ est **reconnaissable** par un TTC s'il existe un TTC G qui engendre T, i.e. tel que $T = \rightarrow_G$. La clôture transitive et réflexive de la relation $\rightarrow_G$ (notée $\rightarrow^*_G$) est reconnaissable par un TTC (voir par exemple [19]). Il a été démontré dans [25] que les TTC i-préservent la reconnaissabilité. Nous simulons les dérivations $\mathsf{bo}(k)$ à l'aide d'un TTC dans le cas de systèmes linéaires à gauche (mais pas nécessairement à droite). Plus exactement, nous nous servirons de la clôture réflexive et transitive d'un **système de réécriture clos reconnaissable** (noté SCR). Un SCR $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ est un SRT (possiblement infini) défini à partir d'un ensemble fini I et de paires (R_i, K_i) (pour $i \in I$) d'ensembles reconnaissables non vides. L'ensemble $\mathcal{G}$ est alors défini par :

$$\mathcal{G} = \{l \rightarrow r \mid \exists i \in I, l \in R_i, r \in K_i\},$$

La relation $\rightarrow^*_{\mathcal{G}}$ est reconnaissable par un TTC.

Chapitre 3

La stratégie k-bornée : le cas linéaire

3.1 Présentation du chapitre

Définition informelle. Nous allons commencer par définir la notion de stratégie de réécriture k-bornée ($\mathsf{bo}(k)$) en nous intéressant aux systèmes linéaires (linéaires à gauche et à droite). Les définitions formelles sont données dans la section 3.2, et il s'agit ici uniquement de donner une intuition au lecteur. Soit $\mathcal{R}$ un système linéaire, et k un entier. Une dérivation $s \to_{\mathcal{R}}^{n} t$ est $\mathsf{bo}(k)$ si lorsqu'une règle $l_i \to r_i$ est appliquée, la partie de la substitution σ_i située à une profondeur supérieure (strictement) à k ne peut pas être réécrite, c'est-à-dire qu'elle n'apparaît pas dans le membre gauche l_j d'une règle appliquée plus tard. Prenons un exemple avec un système de réécriture de mots (vu comme un système de réécriture de termes) et considérons le cas $k = 2$. Lorsqu'une règle est appliquée, la partie de la substitution située à une profondeur (strictement) supérieure à 2 ne peut pas être réécrite ultérieurement (cette partie apparaît en rouge sur la figure 3, et à côté de chaque symbole figure la profondeur dans σ_0).

Ainsi, les dérivations de la figure 4 qui prolongent le pas de réécriture

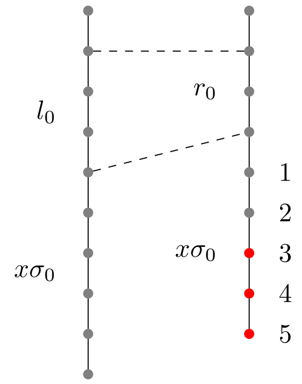

FIGURE 3 – En rouge, la partie interdite ($k = 2$).

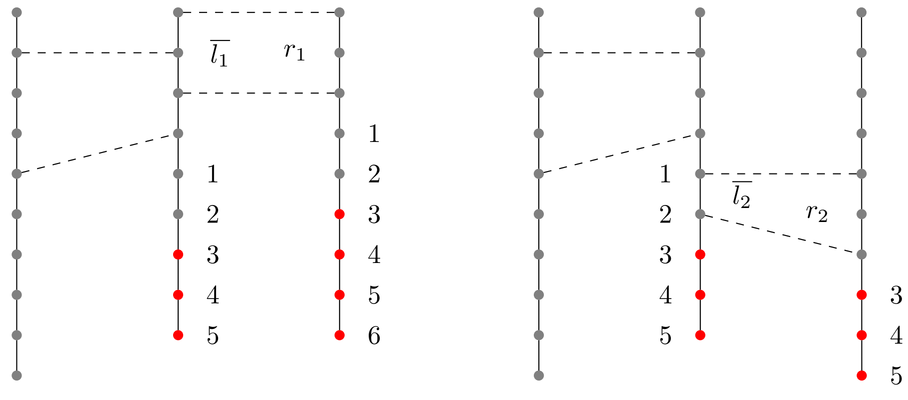

FIGURE 4 – Deux dérivations $\mathsf{bo}(2)$..

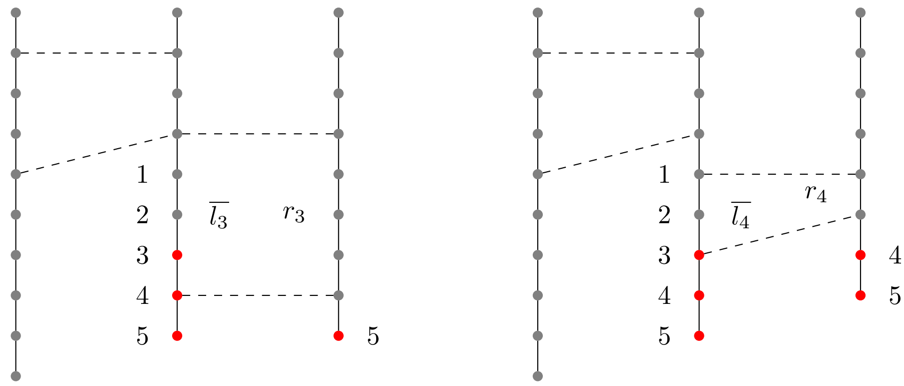

FIGURE 5 – Deux dérivations pas $\mathsf{bo}(2)$.

représenté sur la figure 3 sont 2-bornées puisque pour chacune d'entre elles, lors du deuxième pas, le membre gauche (respectivement l_1 et l_2) n'empiète pas sur la partie interdite en rouge.

Par contre, celles de la figure 5 ne sont pas $\mathsf{bo}(2)$: pour chacune d'entre elles, lors du deuxième pas, le membre gauche (respectivement l_3 et l_4) empiète sur la partie interdite.

Un système de marquage.

Pour définir formellement la notion de dérivation $\mathsf{bo}(k)$, nous utilisons un système de marquage pour les termes, et une notion de réécriture marquée. Dans ce chapitre, un terme marqué est un élément de $\mathcal{T}(\mathcal{F}^{\mathbb{N}}, \mathcal{V})$, c'est-à-dire un terme de $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ dont les symboles appartenant à $\mathcal{F}$ sont marqués par un entier (voir section 2.7). Rappelons qu'étant donné un terme t, nous notons $\overline{t}$ un terme marqué tel qu'en effaçant les marques on obtienne t, et que nous assimilons les symboles sans marques aux symboles marqués par 0. Nous notons $\mathsf{m}(\overline{t})$ la marque à la racine de $\overline{t}$. À chaque dérivation

$$s = s_0 \rightarrow_{\mathcal{R},l_0\rightarrow r_0,v_0} s_1 \ldots \rightarrow_{\mathcal{R},l_{n-1}\rightarrow r_{n-1},v_{n-1}} t,$$

nous associons une unique dérivation marquée

$$s_0 \circ\!\!\rightarrow_{\mathcal{R}} \overline{s_1} \ldots \circ\!\!\rightarrow_{\mathcal{R}} \overline{s_n} = \overline{t},$$

Le marquage est effectué de manière à ce qu'une dérivation soit $\mathsf{bo}(k)$ si et seulement si dans la dérivation marquée associée, la marque maximale apparaissant dans un membre gauche est inférieure ou égale à k. Nous avons déjà vu comment ce processus fonctionne pour le premier pas, c'est-à-dire comment obtenir $\overline{s_1}$: il faut prendre le terme s_1 et le marquer comme suit :

— chaque symbole de $\overline{s_1}$ situé dans la substitution σ_0 est marqué par sa profondeur dans σ_0,

— les autres symboles sont marqués par 0.

Nous obtenons ensuite pour chaque i, $1 \leq i \leq n-1$, le terme $\overline{s_{i+1}}$ en prenant le terme s_{i+1} et en le marquant ainsi :

— toutes les marques dans le contexte restent inchangées :

$$\forall u \in \mathcal{P}\mathsf{os}(\overline{s_{i+1}}), u \not\geq v_i, \mathsf{m}(\overline{s_{i+1}}/u) = \mathsf{m}(\overline{s_i}/u),$$

— toutes les marques dans le membre droit sont mises à 0 :

$$\forall u \in \mathcal{P}\mathsf{os}(r_i), \mathsf{m}(\overline{s_{i+1}}/v_i \cdot u) = 0,$$

— pour les marques dans la substitution, il faut prendre le maximum entre la marque précédente, et la profondeur de cette marque dans la substitution : $\forall x \in \mathcal{V}\mathsf{ar}(r_i), \forall u \in \mathcal{P}\mathsf{os}(x\sigma_i)$,

$$\mathsf{m}(\overline{s_{i+1}}/v_i \cdot \mathsf{pos}(r_i, x) \cdot u) = \max(\mathsf{m}(\overline{s_i}/v_i \cdot \mathsf{pos}(l_i, x) \cdot u), |u| + 1).$$

Ainsi, lorsqu'un symbole f à la position u dans $\overline{s_{i+1}}$ est marqué par $m > 0$, cela signifie soit qu'il est situé à profondeur m dans σ_i, soit qu'il admet une origine dans un terme s_j, $j < i$, située à profondeur m dans σ_j. Une dérivation est $\mathsf{bo}(k)$ si dans la dérivation marquée associée, la marque maximale apparaissant dans un membre gauche est inférieure à k (dans le cas où le membre gauche est une variable, il faut vérifier que les marques situées au-dessus de la position où est appliquée la règle sont inférieures à k). Les marques figurent sur les dérivations représentées sur les figures 4 et 5 (avec la convention que lorsqu'une marque n'est pas indiquée près d'un symbole, elle vaut 0).

Les systèmes linéaires k-bornés. Nous présentons ensuite la classe des systèmes linéaires k-bornés $\mathsf{LBO}(k)$: un système est $\mathsf{LBO}(k)$ si toute dérivation $s \rightarrow^*_{\mathcal{R}} t$ peut être remplacée par une dérivation k-bornée $s \;_{\mathsf{bo}(k)}\!\!\rightarrow^*_{\mathcal{R}} t$. Le problème de l'appartenance n'est pas décidable pour la classe $\mathsf{LBO}(0)$ (section 3.12.3). Nous définirons donc pour chaque classe $\mathsf{LBO}(k)$ la sous-classe des systèmes linéaires fortement k-bornés $\mathsf{LFBO}(k)$ pour laquelle le problème de l'appartenance est décidable (section 3.11). Nous montrons que de nombreuses classes de systèmes définies en utilisant des restrictions syntaxiques ou des stratégies de réécriture appartiennent à la classe $\mathsf{LFBO} = \bigcup_{k \in \mathsf{N}} \mathsf{LFBO}(k)$, en montrant le lien existant avec la classe des systèmes fortement bottom-up [30] qui contient tous ces systèmes.

Simulation par un système clos. Les résultats d'i-préservation de la reconnaissabilité et de décidabilité des problèmes de terminaison pour cette stratégie sont présentés dans les sections 3.8 et 3.9. Nous démontrons que les dérivations k-bornées peuvent être simulées à l'aide d'un système clos. Brainerd a démontré dans [13] que les systèmes clos i-préservent la reconnaissabilité. Depuis, de nombreuses recherches ont étendu ou amélioré ce résultat pour des classes de systèmes plus larges (voir par exemple [26, 27, 25, 30, 85]. L'idée de simulation par un système clos a été utilisée pour démontrer que la stratégie bottom-up-k i-préserve la reconnaissabilité [30], et le résultat d'i-préservation présenté ici est essentiellement une reformulation de ce résultat pour la stratégie $\mathsf{bo}(k)$ (la section 3.12 est consacrée à la comparaison de ces stratégies). Nous montrons préalablement qu'il est toujours possible de se ramener au cas $k = 0$, et nous nous contentons donc de simuler les dérivations $\mathsf{bo}(0)$.

Conséquences. Puisque les systèmes clos i-préservent la reconnaissabilité, cette simulation assure que les systèmes de la classe $\mathsf{LBO}(k)$ i-préservent la reconnaissabilité. À notre connaissance, il n'y a pas pour l'instant de classe contenant la notre et pour laquelle le problème de la i-préservation de la reconnaissabilité est décidable, puisqu'elle contient (strictement) la classe des systèmes linéaires inverses finite path overlapping [85]. D'autres classes ne sont pas comparables à la nôtre (pour l'inclusion), en particulier la classe des systèmes match-bounded [42] (voir section 3.14). Cette simulation nous permettra aussi de démontrer que les problèmes de terminaison, de u-terminaison, de i-terminaison et de i-u-terminaison sont décidables pour la stratégie $\mathsf{bo}(k)$. Nous en déduirons que les problèmes de terminaison et de i-terminaison sont décidables pour la classe $\mathsf{LBO}(k)$. De même, nous démontrerons que les problèmes de u-terminaison et de i-u-terminaison sont décidables pour la classe $\mathsf{LFBO}(k)$. Toutefois, nous n'avons pas montré que les problèmes de u-terminaison et d'i-u-terminaison sont décidables pour la classes des systèmes $\mathsf{LBO}(k)$. En effet, il est possible qu'un système $\mathcal{R} \in \mathsf{LBO}(k)$ ne termine pas sur un terme s alors qu'il $\mathsf{bo}(k)$-termine sur s. Cependant, pour la sous-classe des systèmes $\mathsf{LFBO}(k)$, les problèmes de ce type ne se présentent pas, et nous démontrons dans la section 3.11 que les problèmes de u-terminaison et de i-u-terminaison sont décidables pour cette classe.

3.2 Réécriture k-bornée

Pour le restant du chapitre, $\mathcal{F}$ est une signature, $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ désigne un SRT linéaire et k un entier. Nous allons nous servir d'un système de marquage pour définir la notion de dérivation $\mathsf{bo}(k)$. Les notations concernant les termes marqués et les automates associés ont été introduites dans les sections 2.7 page 14 et 2.12.2 page 23. Dans ce chapitre, un terme marqué sera un élément de $\mathcal{T}(\mathcal{F}^{\mathbb{N}}, \mathcal{V})$. Nous notons simplement $\overline{\boldsymbol{\mathcal{T}}}\boldsymbol{(\mathcal{V})}$ l'ensemble $\mathcal{T}(\mathcal{F}^{\mathbb{N}}, \mathcal{V})$, et $\overline{\boldsymbol{\mathcal{T}}}$ l'ensemble $\mathcal{T}(\mathcal{F}^{\mathbb{N}})$. Tout comme nous notons $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ l'ensemble $\mathcal{T}(\mathcal{F})$, et $\boldsymbol{\mathcal{T}(\mathcal{V})}$ l'ensemble $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$. Rappelons que pour un terme $\bar{t}$, $\mathsf{m}(\bar{t})$ renvoie la valeur de la marque à la racine de t, et que les variables ne sont pas marquées (i.e. $\forall x \in \mathcal{V}, \mathsf{m}(x) = 0$). Nous noterons simplement $\odot$ l'opération $\odot_{\setminus\emptyset}$ (définition 2.6 page 16). Nous avons donc pour tout terme $\bar{t}$, tout entier n, et toute position $u \in \mathcal{P}\mathsf{os}(\bar{t})$,

$$\mathsf{m}(\bar{t} \odot n/u) = \max(\mathsf{m}(\bar{t}/u), |u| + n).$$

3.2.1 Réécriture marquée

Nous allons définir la relation de réécriture marquée qui nous sera utile pour définir les dérivations k-bornées.

Définition 3.1 (Réécriture marquée)**.** *Nous définissons la* **relation de réécriture marquée** $\circ\!\!\rightarrow_{\mathcal{R}}$ *sur* $\overline{\mathcal{T}} \times \overline{\mathcal{T}}$ *par*

$$\bar{s} \circ\!\!\rightarrow_{\mathcal{R}} \bar{t},$$

s'il existe une position $v \in \mathcal{P}\mathsf{os}(s)$*, une règle* $l \to r \in \mathcal{R}$*, une version marquée* $\bar{l} \in \overline{\mathcal{T}}(\mathcal{V})$ *de* l*, et une substitution marquée* $\overline{\sigma}$ *tels que :*

$$\bar{s} = \bar{s}[\bar{l}\overline{\sigma}]_v, \;\; \bar{t} = \bar{s}[r(\overline{\sigma} \odot 1)]_v. \tag{3.1}$$

Nous préciserons parfois la règle appliquée, la position où cette règle est appliquée, la version marquée du membre gauche, la substitution utilisée, ou la substitution utilisée sans les marques et nous pourrons noter

$$\bar{s} \circ\!\!\rightarrow_{\mathcal{R},l\to r,\bar{l},v,\overline{\sigma}} \bar{t}.$$

Nous nous autoriserons à faire figurer l'un ou plusieurs de ces indices. Notons toutefois qu'il suffit d'indiquer la position v, la règle utilisée, et le terme $\bar{s}$ pour connaître $\bar{l}$, $\overline{\sigma}$ et donc $\bar{t}$. Toutefois, indiquer dans la notation $\bar{l}$ ou $\overline{\sigma}$ nous sera parfois utile. L'évolution des marques sur une branche durant un pas de réécriture est illustrée par la figure 6 page 33 (les marques figurent entre crochets).

Remarque 3.2. *Remarquons que étant donnés un terme* $\bar{s}$ *et un pas de réécriture* $s \rightarrow_{\mathcal{R},l\to r,v} t$*, il existe une et une seule version marquée* $\bar{t}$ *de* t *telle que* $\bar{s} \circ\!\!\rightarrow_{\mathcal{R},l\to r,v} \bar{t}$*.*

Cette définition s'adapte facilement au cas des mots.

Remarque 3.3. *Dans le cas où* M *est un système de réécriture de mots sur un alphabet* A *il suffit, pour définir la réécriture marquée, de considérer soit le système de réécriture de termes équivalent (voir section 2.10), soit les mots sur l'alphabet* $A^{\mathbb{N}} = \{a^i \mid a \in A\}$*, et la réécriture marquée qui correspond i.e. pour tout* $l \to r$*,* $\bar{s} \rightarrow_M \bar{t}$ *s'il existe* $\overline{\alpha}, \overline{\beta} \in (A^{\mathbb{N}})^*$*,* $l \to r \in M$ *tels que*

$$\bar{s} = \overline{\alpha} \cdot \bar{l} \cdot \overline{\beta} \circ\!\!\rightarrow_M \bar{t} = \overline{\alpha} \cdot r \cdot (\overline{\beta} \odot 1),$$

où pour tout suffixe $\overline{\gamma}$ *de* $\overline{\beta}$ *la marque apparaissant sur le symbole à la racine (sur le symbole le plus à gauche) de* γ *dans* $\overline{\beta} \odot 1$ *est le maximum entre la marque apparaissant à la racine de* $\overline{\gamma}$ *et* $|\beta_0| + 1$*, où* β_0 *est le préfixe de* β *tel que* $\beta = \beta_0 \cdot \gamma$*.*

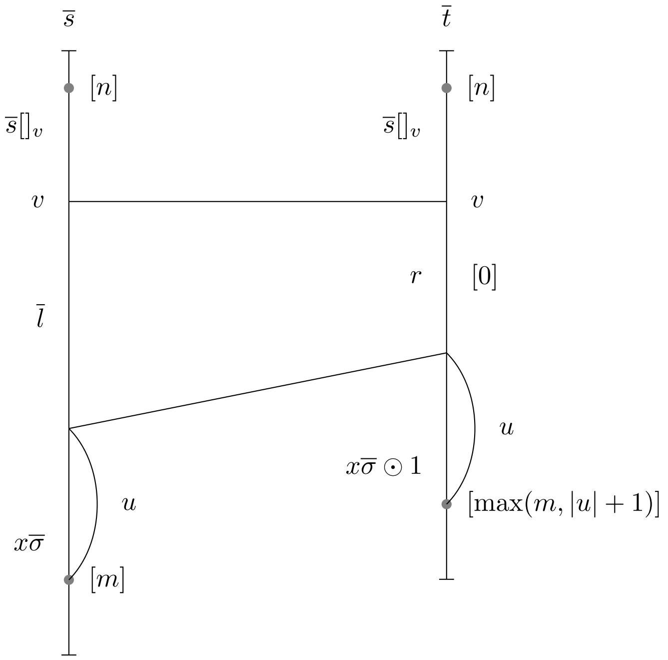

FIGURE 6 – Un pas de réécriture marquée.

Dérivation marquée associée À chaque dérivation

$$d : s_0 \to_{\mathcal{R},l_0\to r_0,v_0} s_1 \to_{\mathcal{R},l_1\to r_1,v_1} \dots \to_{\mathcal{R},l_{n-1}\to r_{n-1},v_{n-1}} s_n \tag{3.2}$$

nous faisons correspondre une (unique) dérivation marquée

$$\overline{d} : \overline{s_0} = s_0 \circ\!\!\to_{\mathcal{R},l_0\to r_0,v_0} \overline{s_1} \circ\!\!\to_{\mathcal{R},l_1\to r_1,v_1} \dots \circ\!\!\to_{\mathcal{R},l_{n-1}\to r_{n-1},v_{n-1}} \overline{s_n}, \tag{3.3}$$

appelée la **dérivation marquée associée à *d***. La remarque 3.2 permet de garantir l'unicité de cette dérivation. Rappelons aussi que nous identifions les termes ayant toutes leurs marques à 0 aux termes sans marques.

Exemple 3.4. *La dérivation suivante dans* $\mathcal{R}_0 = \{\mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) \to \mathsf{f}(x)\}$

$$d_0 : \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{a}))) \to_\epsilon \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{a})) \to_\epsilon \mathsf{f}(\mathsf{a})$$

est associée à la dérivation marquée

$$\overline{d_0} : \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{a}))) \circ\!\!\to_\epsilon \mathsf{f}(\mathsf{f}^1(\mathsf{a}^2)) \circ\!\!\to_\epsilon \mathsf{f}(\mathsf{a}^2).$$

À la dérivation

$$d_1 : \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{a}))) \to_0 \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{a})) \to_\epsilon \mathsf{f}(\mathsf{a}),$$

nous associons la dérivation marquée

$$\overline{d_1} : \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{a}))) \circ\!\!\to_0 \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{a}^1)) \circ\!\!\to_\epsilon \mathsf{f}(\mathsf{a}^1).$$

Nous avons dans

$$\mathcal{R}_4 = \{\mathsf{f}(\mathsf{g}(x)) \to \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{i}(x))), \mathsf{i}(x) \to \mathsf{g}(x)\}$$

la dérivation suivante

$$d_2 : \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{a})) \to_{\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))\to\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{i}(x))),\epsilon} \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{i}(\mathsf{a}))) \to_{\mathsf{i}(x)\to\mathsf{g}(x),00} \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{a})))$$

à laquelle est associée la dérivation marquée

$$\overline{d_2} : \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{a})) \circ\!\!\to_{\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))\to\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{i}(x))),\epsilon} \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{i}(\mathsf{a}^1))) \circ\!\!\to_{\mathsf{i}(x)\to\mathsf{g}(x),00} \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{a}^1))).$$

Dans $\mathcal{R}_1 = \{\mathsf{f}(x) \to \mathsf{g}(x), \mathsf{g}(\mathsf{i}(x)) \to \mathsf{i}(x), \mathsf{i}(x) \to \mathsf{a}\}$ *nous avons la dérivation*

$$d_3 : \mathsf{f}(\mathsf{i}(\mathsf{i}(\mathsf{b}))) \to_{\mathsf{f}(x)\to\mathsf{g}(x),\epsilon} \mathsf{g}(\mathsf{i}(\mathsf{i}(\mathsf{b}))) \to_{\mathsf{i}(x)\to\mathsf{a},00} \mathsf{g}(\mathsf{i}(\mathsf{a}))$$

qui est associée à la dérivation marquée

$$\overline{d_3} : \mathsf{f}(\mathsf{i}(\mathsf{i}(\mathsf{b}))) \circ\!\!\to_{\mathsf{f}(x)\to\mathsf{g}(x),\epsilon} \mathsf{g}(\mathsf{i}^1(\mathsf{i}^2(\mathsf{b}^3))) \circ\!\!\to_{\mathsf{i}(x)\to\mathsf{a},00} \mathsf{g}(\mathsf{i}^1(\mathsf{a})).$$

Dans $\mathcal{R}_6 = \{x \to \mathsf{h}(x, \mathsf{a}), \mathsf{f}(x) \to \mathsf{i}(x)\}$ *la dérivation*

$$d_4 : \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{a}))) \to_{\mathsf{f}(x)\to\mathsf{i}(x),\epsilon} \mathsf{i}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{a}))) \to_{x\to\mathsf{h}(x,\mathsf{a}),000} \mathsf{i}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{h}(\mathsf{a},\mathsf{a}))))$$

est associée à la dérivation marquée

$$\overline{d_4} : \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{a}))) \circ\!\!\to_{\mathsf{f}(x)\to\mathsf{i}(x),\epsilon} \mathsf{i}(\mathsf{f}^1(\mathsf{g}^2(\mathsf{a}^3))) \circ\!\!\to_{x\to\mathsf{h}(x,\mathsf{a}),000} \mathsf{i}(\mathsf{f}^1(\mathsf{g}^2(\mathsf{h}(\mathsf{a}^3,\mathsf{a}))))$$

Le premier lemme est une conséquence directe de la définition de la réécriture marquée.

Lemme 3.5. *Pour tout pas de réécriture marquée* $\overline{s} \circ\!\!\to_{\mathcal{R}} \overline{t}$, *et tout terme* $\widetilde{s} \preceq_{\mathsf{m}} \overline{s}$, *il existe un unique terme* $\widetilde{t}$ *tel que* $\widetilde{s} \circ\!\!\to_{\mathcal{R}} \widetilde{t}$. *De plus,* $\widetilde{t} \preceq_{\mathsf{m}} \overline{t}$.

3.3 Dérivations et systèmes k-bornés

Nous pouvons maintenant définir la notion de dérivation $\mathsf{bo}(k)$.

Définition 3.6 (Dérivation marquée k-bornée)**.** *Un pas de réécriture marquée*

$$\overline{s} = \overline{s}[\overline{l}\sigma]_v \circ\!\!\to_{\mathcal{R},l\to r,v} \overline{t} = \overline{s}[r(\overline{\sigma} \odot 1)]_v$$

est ***k*-borné** *(*$\mathsf{bo}(k)$*) s'il satisfait les deux conditions suivantes :*

$$l \notin \mathcal{V} \Rightarrow \mathsf{mmax}(\overline{l}) \leq k, \tag{3.4}$$
$$l \in \mathcal{V} \Rightarrow \forall u \prec v, \mathsf{m}(\overline{t}/u) \leq k. \tag{3.5}$$

Une dérivation marquée $s \circ\!\!\to^*_{\mathcal{R}} t$ *est* **bo(*k*)** *si tous les pas dans la dérivation sont* $\mathsf{bo}(k)$.

Définition 3.7 (Dérivation k-bornée)**.** *Une dérivation* $d : s \to^*_{\mathcal{R}} t$ *est* **k-bornée** *si la dérivation marquée associée* $\overline{d}$ *est* $\mathsf{bo}(k)$.

Ainsi la dérivation 3.2 est $\mathsf{bo}(k)$ si la dérivation marquée associée 3.3 est $\mathsf{bo}(k)$. Par définition, la composée de deux dérivations marquées $\mathsf{bo}(k)$ est une dérivation $\mathsf{bo}(k)$. Toutefois, cela n'est pas vrai pour les dérivations non marquées : la composition de deux dérivations $\mathsf{bo}(k)$ n'est pas nécessairement $\mathsf{bo}(k)$ puisque tout pas de réécriture non marqué est $\mathsf{bo}(k)$.

Exemple 3.8. *Reprenons les dérivations de l'exemple 3.4 page 33. La dérivation* d_0 *est* $\mathsf{bo}(1)$*. En effet, dans la dérivation marquée associée*

$$\overline{d_0} : \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{a}))) \circ\!\!\rightarrow_\epsilon \mathsf{f}(\mathsf{f}^1(\mathsf{a}^2)) \circ\!\!\rightarrow_\epsilon \mathsf{f}(\mathsf{a}^2).$$

la marque maximale apparaissant dans le membre gauche d'une règle appliquée est 1*. La dérivation* d_1 *est* $\mathsf{bo}(0)$*, les membres gauches dans la dérivation marquée associée ont leurs marques à* 0

$$\overline{d_1} : \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{a}))) \circ\!\!\rightarrow_0 \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{a}^1)) \circ\!\!\rightarrow_\epsilon \mathsf{f}(\mathsf{a}^1).$$

La dérivation d_2 *est elle aussi* $\mathsf{bo}(0)$

$$\overline{d_2} : \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{a})) \circ\!\!\rightarrow_{\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))\rightarrow\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{i}(x))),\epsilon} \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{i}(\mathsf{a}^1))) \circ\!\!\rightarrow_{\mathsf{i}(x)\rightarrow\mathsf{g}(x),00} \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{a}^1))).$$

La dérivation d_3 *est* $\mathsf{bo}(2)$ *puisque la marque maximale apparaissant dans un membre gauche est* 2

$$\overline{d_3} : \mathsf{f}(\mathsf{i}(\mathsf{i}(\mathsf{b}))) \circ\!\!\rightarrow_{\mathsf{f}(x)\rightarrow\mathsf{g}(x),\epsilon} \mathsf{g}(\mathsf{i}^1(\mathsf{i}^2(\mathsf{b}^3))) \circ\!\!\rightarrow_{\mathsf{i}(x)\rightarrow\mathsf{a},00} \mathsf{g}(\mathsf{i}^1(\mathsf{a})).$$

La dérivation d_4 *est* $\mathsf{bo}(2)$*. En effet, dans la dérivation marquée associée*

$$\overline{d_4} : \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{a}))) \circ\!\!\rightarrow_{\mathsf{f}(x)\rightarrow\mathsf{i}(x),\epsilon} \mathsf{i}(\mathsf{f}^1(\mathsf{g}^2(\mathsf{a}^3))) \circ\!\!\rightarrow_{x\rightarrow\mathsf{h}(x,\mathsf{a}),000} \mathsf{i}(\mathsf{f}^1(\mathsf{g}^2(\mathsf{h}(\mathsf{a}^3,\mathsf{a})))),$$

lors du deuxième pas, le membre gauche de la règle est une variable. Il faut donc regarder la marque maximale apparaissant à une position qui précède celle où est appliquée la règle. Ici, la règle est appliquée à la position 000*, et la marque maximale est* 2 *(elle apparaît à la position* 00*). Ce pas est donc* $\mathsf{bo}(2)$ *et* d_4 *est* $\mathsf{bo}(2)$*.*

Nous introduisons maintenant quelques notations.

Définition 3.9. *Nous utiliserons les notations suivantes :*

— *La relation binaire* ${}_{\mathsf{bo}(k)}\!\circ\!\!\rightarrow_{\mathcal{R}}$ *sur* $\overline{\mathcal{T}} \times \overline{\mathcal{T}}$ *est définie par* $\overline{s}\ {}_{\mathsf{bo}(k)}\!\circ\!\!\rightarrow_{\mathcal{R}} \overline{t}$ *s'il existe un pas de réécriture marqué* $\mathsf{bo}(k)$ *entre* $\overline{s}$ *et* $\overline{t}$*.*

— *La relation binaire* ${}_{\mathsf{bo}(k)}\!\rightarrow^*_{\mathcal{R}}$ *sur* $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$ *est définie par* $s\ {}_{\mathsf{bo}(k)}\!\rightarrow^*_{\mathcal{R}} t$ *s'il existe une dérivation* $\mathsf{bo}(k)$ *entre* s *et* t *(c'est-à-dire s'il existe* $\overline{t}$ *et une dérivation marquée* $\mathsf{bo}(k)$ *telle que* $s\ {}_{\mathsf{bo}(k)}\!\circ\!\!\rightarrow^*_{\mathcal{R}} \overline{t}$*).*

Nous préciserons parfois la règle appliquée, la position où cette règle est appliquée, la version marquée du membre gauche, la substitution utilisée, et la substitution utilisée sans les marques et noterons

$$\overline{s}\ {}_{\mathsf{bo}(k)}\!\circ\!\!\rightarrow_{\mathcal{R},l\rightarrow r,\overline{l},v,\overline{\sigma},\sigma} \overline{t}.$$

Nous nous autoriserons à faire figurer l'un ou plusieurs de ces indices, bien que cela puisse être redondant.

Remarque 3.10. *Par définition, si* $s\ {}_{\mathsf{bo}(k)}\!\rightarrow^*_{\mathcal{R}} t$*, la dérivation marquée associée est* $\mathsf{bo}(k)$*, et il existe* $\overline{t}$ *tel que*

$$s\ {}_{\mathsf{bo}(k)}\!\circ\!\!\rightarrow^*_{\mathcal{R}} \overline{t}.$$

S'il existe une dérivation $\overline{s}\ {}_{\mathsf{bo}(k)}\!\circ\!\!\rightarrow^*_{\mathcal{R}} \overline{t}$*, d'après le lemme 3.5 page 34, il existe une dérivation*

$$s\ {}_{\mathsf{bo}(k)}\!\circ\!\!\rightarrow^*_{\mathcal{R}} \widetilde{t},$$

et $s\ {}_{\mathsf{bo}(k)}\!\rightarrow^*_{\mathcal{R}} t$*. Nous nous contenterons donc parfois de démontrer qu'il existe une dérivation* $\mathsf{bo}(k)$ *entre deux termes marqués* $\overline{s}\ {}_{\mathsf{bo}(k)}\!\circ\!\!\rightarrow^*_{\mathcal{R}} \overline{t}$ *pour démontrer que* $s\ {}_{\mathsf{bo}(k)}\!\rightarrow^*_{\mathcal{R}} t$ *(au lieu de montrer que la dérivation marquée associée à* $s\ {}_{\mathsf{bo}(k)}\!\rightarrow^*_{\mathcal{R}} t$ *est* $\mathsf{bo}(k)$*).*

Les systèmes $\mathsf{LBO}(k)$

Nous pouvons maintenant définir la notion de système linéaire k-borné.

Définition 3.11 (La classe $\mathsf{LBO}(k)$)**.** *Un système linéaire $\mathcal{R}$ est **k-borné** si :*

$$\rightarrow^*_{\mathcal{R}} = \ _{\mathsf{bo}(k)}\!\rightarrow^*_{\mathcal{R}}$$

La classe des **systèmes linéaires k-bornés** *est notée $\mathsf{LBO}(k)$. La classe des* **systèmes linéaires bornés** *est $\mathsf{LBO} := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathsf{LBO}(k)$.*

Autrement dit, $\mathcal{R}$ est $\mathsf{LBO}(k)$ si toute dérivation peut être remplacée par une dérivation $\mathsf{bo}(k)$. Le problème de l'appartenance à la classe $\mathsf{LBO}(0)$ est indécidable (section 3.11). Cela nous amènera à définir une sous-classe de $\mathsf{LBO}(k)$, la classe $\mathsf{LFBO}(k)$ des systèmes linéaires fortement $\mathsf{bo}(k)$, pour laquelle le problème de l'appartenance est décidable (voir section 3.11). Des exemples de systèmes LBO sont donnés dans l'exemple 3.33 page 47.

3.3.1 Termes et dérivations bien marqués pour k

Nous allons maintenant voir que dans une dérivation marquée associée $\mathsf{bo}(k)$, les marques qui apparaissent sur les branches ont une certaine forme. Ces termes, seront dits **bien marqués pour k**.

Définition 3.12 (Terme bien marqué pour k)**.** *Un terme $\overline{t} \in \overline{\mathcal{T}}(\mathcal{V})$ est* **bien marqué pour k** *si pour tout $w \in \mathcal{L}\mathsf{v}(t)$, une de ces deux conditions est vérifiée :*

1) pour tout $u \preceq w, \mathsf{m}(\overline{t}/u) \leq k$

2) il existe $u \preceq w$, tel que

- *$\forall v \prec u$, $\mathsf{m}(\overline{t}/v) \leq k$,*
- *$\forall v \in \mathcal{P}\mathsf{os}^{\succeq u}(t)$, $\mathsf{m}(\overline{t}/v) = k+1+|v|-|u|$ (en particulier, $\mathsf{m}(\overline{t}/u) = k+1$).*

Nous étendons cette définition aux substitutions : $\overline{\sigma}$ est bien marquée pour k si pour tout $x \in \mathcal{V}$, le terme $x\overline{\sigma}$ est bien marqué pour k.

Ainsi, un terme $\overline{t}$ est bien marqué pour k si pour chaque branche, il existe $i \geq 1$ tel que la suite des marques qui apparaît en parcourant la branche en allant de la racine vers la feuille est de la forme :

- $m_1, m_2, \ldots, m_i$, où $\forall p, m_p \leq k$, si 1) est vérifiée,
- $m_1, m_2 \ldots, m_i, k+1, \ldots, k+j$, où $\forall p, m_p \leq k$, si la condition 2) est vérifiée.

En particulier, lorsque $\overline{t}$ est bien marqué, pour tout $w \in \mathcal{P}\mathsf{os}_{\mathcal{V}}(\overline{t})$, la condition 1) est vérifiée puisque $\mathsf{m}(\overline{t}/w) = 0$ (les variables ne sont pas marquées). Nous avons représenté sur la figure 7 trois branches bien marquées pour k, et sur la figure 8 trois branches qui ne sont pas bien marquées pour k (en considérant que les marques qui apparaissent sont toutes positives ou nulles).

Remarque 3.13. *Nous imposons dans la définition de terme bien marqué pour k que les marques au-dessus des variables soient inférieures ou égales à k. Par conséquent, si $\overline{l}$ et $\overline{\sigma}$ sont bien marqués pour k, alors $\overline{l\sigma}$ est bien marqué pour k. De même, si $\overline{l\sigma}$ est bien marqué pour k, et si $\overline{l}$ est bien marqué pour k, alors $\overline{\sigma}$ est bien marquée pour k.*

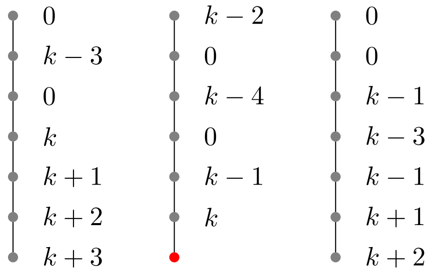

FIGURE 7 – Trois branches bien marquées pour k
(en rouge, la position d'une variable).

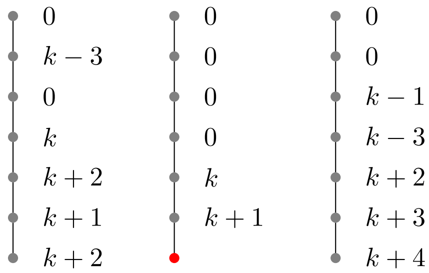

FIGURE 8 – Trois branches mal marquées pour k
(en rouge, la position d'une variable).

Exemple 3.14. *Considérons les signatures de l'exemple 2.2 page 15 et $k = 2$. Les termes suivants sont bien marqués pour* 2

$$\mathsf{a},\ \mathsf{a}^1,\ \mathsf{a}^2,\ \mathsf{a}^3, x.$$

En effet, a*,* a^1 *et* a^2 *et* x *satisfont 1), et* a^3 *satisfait 2). Par contre,* a^4 *n'est pas bien marqué pour* 2*. Les termes*

$$\mathsf{f}^1(\mathsf{h}(\mathsf{a}^2, \mathsf{a}^3)),\ \mathsf{f}^1(\mathsf{h}^1(\mathsf{a}^0, \mathsf{a}^2)),\ \mathsf{f}^2(\mathsf{h}^4(\mathsf{a}^5, \mathsf{a}^5)),\ \mathsf{f}^0(\mathsf{h}^3(\mathsf{a}^4, \mathsf{a}^4)))$$

sont bien marqués pour 2*. Par contre, le terme*

$$\bar{t} = \mathsf{f}^3(\mathsf{h}^4(\mathsf{a}^4, \mathsf{a}^5))$$

n'est pas bien marqué pour 2*. En effet, la branche* $(\epsilon, 0, 01)$ *ne satisfait pas 1) puisqu'une marque supérieure à* 2 *apparaît. Elle ne satisfait pas non plus 2). En effet, puisque* $\mathsf{m}(\bar{t}) = 3$*, nous devrions avoir :*

$$\mathsf{m}(\bar{t}/00) = 2 + 1 + |00| - |\epsilon| = 5.$$

Or,

$$\mathsf{m}(\bar{t}/00) = \mathsf{m}(\mathsf{a}^4) = 4.$$

Lorsqu'une variable est présente dans un terme bien marqué pour k*, toutes les marques au-dessus doivent être inférieures ou égales à* k*. Les termes suivants sont bien marqués pour* 2 *:*

$$x,\ \mathsf{f}^2(x),\ \mathsf{f}^2(\mathsf{h}^2(\mathsf{f}^3(\mathsf{a}^4), \mathsf{f}^2(y))),\ \mathsf{f}^2(\mathsf{h}(\mathsf{a}^2, y)).$$

Et ceux-ci ne sont pas bien marqués pour 2 *:*

$$\mathsf{f}^4(x),\ \mathsf{f}^3(\mathsf{h}^2(\mathsf{f}^4(\mathsf{a}^5), \mathsf{f}^4(y))),\ \mathsf{f}^1(\mathsf{h}^3(\mathsf{a}^4, y)).$$

Définition 3.15 (Dérivation bien marquée pour k)**.** *Une dérivation est* **bien marquée pour** $\boldsymbol{k}$ *si tous les termes qui apparaissent dans cette dérivation sont bien marqués.*

Nous allons démontrer que toute dérivation qui commence par un terme bien marqué pour k est bien marquée pour k. Nous allons nous servir du lemme suivant.

Lemme 3.16. *Soit* $\bar{t} \in \overline{\mathcal{T}}$ *un terme bien marqué pour* k*, et* $n \in \{0, \ldots, k+1\}$*. Le terme*

$$\bar{t} \odot n \text{ est bien marqué pour } k.$$

Démonstration. Soient $\bar{t}$ un terme bien marqué pour k et $n \in \{0, \ldots, k+1\}$. Soit $w \in \mathcal{L}\mathsf{v}(t)$. Montrons que la branche aboutissant sur w dans $\bar{t} \odot n$ satisfait l'une des deux conditions de la définition 3.12. Rappelons que par définition,

$$\forall u \in \mathcal{P}\mathsf{os}(t),\ \mathsf{m}(\bar{t} \odot n/u) = \max(\mathsf{m}(\bar{t}/u), |u| + n).$$

Deux cas peuvent se produire.

1. Soit il existe $u \preceq w$ tel que $|u| = k + 1 - n$. Dans ce cas, pour tout $v \preceq u$, il existe $m \leq k$ tel que
$$\mathsf{m}(\bar{t} \odot n/v) = \max(\mathsf{m}(\bar{t}/v), m),$$
et pour tout $v \succeq u$,
$$\mathsf{m}(\overline{\sigma} \odot n/v) = \max(\mathsf{m}(\bar{t}/v), k + 1 + |v| - |u|).$$
2. Soit $\forall u \preceq w$, $|u| < k+1-n$. Dans ce cas, pour tout $u \preceq w$, il existe $m \leq k$ tel que
$$\mathsf{m}(\bar{t} \odot n/u) = \max(\mathsf{m}(\bar{t}/u), m),$$

Comme le terme $\bar{t}$ est bien marqué pour k, la branche aboutissant sur w dans $\bar{t}$ satisfait la condition 1) ou la condition 2) de la définition 3.12.

— Si cette branche satisfait la condition 1) de la définition 3.12 et que l'on est dans le cas 1, alors la branche aboutissant sur w dans $\bar{t} \odot n$ satisfait la condition 2) de la définition 3.12 (avec $\mathsf{m}(\bar{t} \odot n/u) = k + 1$).

— Si cette branche satisfait la condition 2) de la définition 3.12 et que l'on est dans le cas 1, alors il existe $u' \preceq w$, tel que
  — $\forall v \prec u'$, $\mathsf{m}(\bar{t}/v) \leq k$,
  — $\forall v \in \mathcal{P}\mathsf{os}^{\succeq u'}(t)$, $\mathsf{m}(\bar{t}/v) = k + 1 + |v| - |u'|$.

  Si $u' \preceq u$, alors pour tout $v \preceq w$,
$$\mathsf{m}(\bar{t} \odot n/v) = \mathsf{m}(\bar{t}/v),$$
  et puisque $\bar{t}$ est bien marqué, la branche aboutissant sur w dans $\bar{t} \odot n$ satisfait la condition 2) de la définition 3.12 (avec $\mathsf{m}(\bar{t} \odot n/u') = k + 1$). Si par contre $u' \succ u$, alors pour tout $v \preceq w$,
  — si $v \prec u$, $\mathsf{m}(\bar{t} \odot n/v) \leq k$,
  — et si $v \succeq u$, $\mathsf{m}(\bar{t} \odot n/v) = k + 1 + |v| - |u|$.

  La branche aboutissant sur w dans $\bar{t} \odot n$ satisfait la condition 2) de la définition 3.12.

— Si cette branche satisfait la condition 1) de la définition 3.12 et que l'on est dans le cas 1, alors pour tout $v \preceq w$,
  — si $v \prec u$, $\mathsf{m}(\bar{t} \odot n/v) \leq k$,
  — et si $v \succeq u$, $\mathsf{m}(\bar{t} \odot n/v) =, k + 1 + |v| - |u|$,

  et la branche aboutissant sur w dans $\bar{t} \odot n$ satisfait la condition 2) de la définition 3.12.

— Si cette branche satisfait la condition 1) et que l'on est dans le cas 2, alors pour tout $v \preceq w$, $\mathsf{m}(\bar{t}/v) \leq k$, et la branche aboutissant sur w dans $\bar{t} \odot n$ satisfait la condition 1) de la définition 3.12.

$\square$

Proposition 3.17. *Toute dérivation commençant par un terme bien marqué pour k et qui est $\mathsf{bo}(k)$ est bien marquée pour k. Par conséquent, toute dérivation marquée associée à une dérivation $\mathsf{bo}(k)$ est bien marquée pour k.*

Démonstration. Soit un pas de réécriture $\mathsf{bo}(k)$ commençant par un terme $\overline{s}$ bien marqué pour k

$$\overline{s} = \overline{s}[\overline{l}\overline{\sigma}]_v \ {}_{\mathsf{bo}(k)}\!\circ\!\!\longrightarrow_{\mathcal{R}} \overline{t} = \overline{s}[r(\overline{\sigma} \odot 1)]_v.$$

Montrons que $\overline{t}$ est bien marqué pour k. Comme le pas est $\mathsf{bo}(k)$, pour tout $u \prec v$, $\mathsf{m}(\overline{s}/u) \leq k$. La branche aboutissant sur v la position de la variable $\square$ dans $\overline{s}[]_v$ satisfait donc la condition 1) de la définition 3.12. Comme $\overline{s}$ est bien marqué pour k, toutes les autres branches de $\overline{s}[]_v$ satisfont l'un des deux conditions de la définition 1). Le terme $\overline{s}[]_v$ est donc bien marqué pour k. Le terme $\overline{l}\overline{\sigma}$ est lui aussi bien marqué pour k. Comme le pas $\overline{s} \ {}_{\mathsf{bo}(k)}\!\circ\!\!\longrightarrow_{\mathcal{R}} \overline{t}$ est $\mathsf{bo}(k)$, $\mathsf{mmax}(\overline{l}) \leq k$, et $\overline{l}$ est bien marqué pour k. La substitution $\overline{\sigma}$ est donc elle aussi bien marquée pour k. D'après le lemme 3.16, $\overline{\sigma} \odot 1$ est bien marquée pour k. Le terme r a ses marques à 0, et est donc bien marqué pour k. Ainsi, $\overline{s}[]_v$, $\overline{\sigma} \odot 1$ et r sont bien marqués pour k. Le terme $\overline{t} = \overline{s}[r(\overline{\sigma} \odot a)]_v$ est donc lui aussi bien marqué pour k. Nous avons montré que toute dérivation commençant par un terme bien marqué pour k et qui est $\mathsf{bo}(k)$ est bien marquée pour k. Par définition, une dérivation marquée associée débute par un terme dont toutes les marques sont à 0. Ce terme est donc bien marqué pour tout $k \in \mathbb{N}$. Par conséquent, toute dérivation marquée associée à une dérivation $\mathsf{bo}(k)$ est bien marquée pour k. □

3.4 Dérivation de bas en haut

Dans la section suivante, nous allons définir une sous-classe de $\mathsf{LBO}(k)$: la classe des systèmes fortement k-bornés. Un système est fortement k-borné si toute dérivation de bas en haut (bh) est $\mathsf{bo}(k)$. Une dérivation $d : s_o \rightarrow^n_{\mathcal{R}} s_n$ est bh si elle respecte la contrainte suivante : pour tout i, pour tout $j \prec i$, l'origine de v_i dans s_{i-j} (lorsqu'elle est définie) n'est pas située sous v_{i-j} (rappelons que v_i est la position où est appliquée la i-ème règle dans la dérivation). La définition d'origine est donnée dans la section 2.11 page 20. Ces dérivations ont été introduites dans [30], et sont désignées sous le nom de dérivations "weakly bottom-up". Nous pouvons formaliser cette restriction formellement à l'aide de la notion de réécriture marquée introduite précédemment.

Définition 3.18 (Dérivation marquée bh)**.** *Un pas de réécriture marquée*

$$\overline{s} = \overline{s}[\overline{l}\sigma]_v \rightarrow_{\mathcal{R},l\rightarrow r,v} \overline{t} = \overline{s}[r(\overline{\sigma} \odot 1)]_v$$

est un pas de **bas en haut** *(*bh*) s'il satisfait les deux conditions suivantes :*

$$l \notin \mathcal{V} \Rightarrow \mathsf{m}(\overline{l}) = 0, \tag{3.6}$$

$$l \in \mathcal{V} \Rightarrow \forall u \prec v, \mathsf{m}(\overline{l}/u) = 0. \tag{3.7}$$

Une dérivation marquée $s \circ\!\!\rightarrow^*_{\mathcal{R}} t$ est une dérivation de **bas en haut** *(*bh*) si tous les pas dans la dérivation sont effectués de* **bas en haut***. Une dérivation (non marquée) $d : s \rightarrow^*_{\mathcal{R}} t$ est une* **dérivation de bas en haut** *(*bh*) si la dérivation marquée associée $\overline{d}$ est* bh.

Remarquons que dans le cas où $l \in \mathcal{V}$, tout pas bh est $\mathsf{bo}(0)$. De même, par définition, toute dérivation $\mathsf{bo}(0)$ est bh. Nous avons représenté deux dérivations bh sur la figure 9 et deux dérivations qui ne sont pas bh sur la figure 10, avec en rouge la partie où ne doit pas se trouver la racine du membre gauche de la règle suivante.

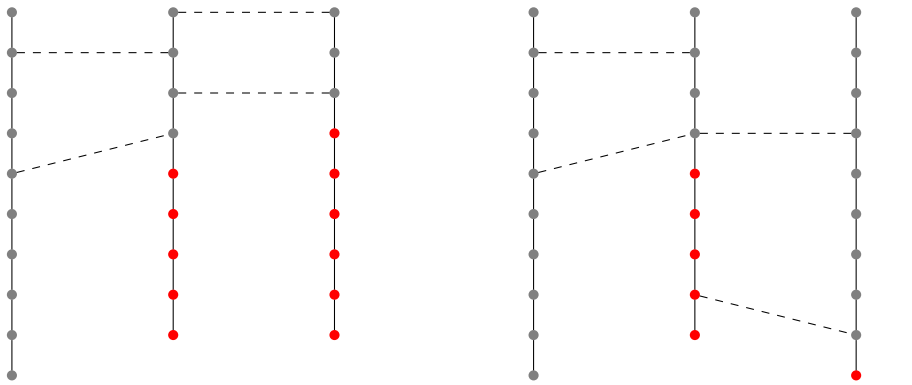

FIGURE 9 – Deux dérivations bh
(en rouge, les marques sont strictement positives).

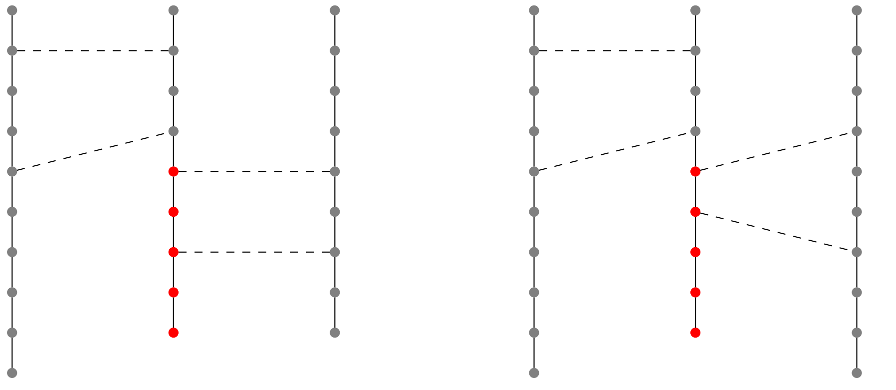

FIGURE 10 – Deux dérivations pas bh
(en rouge, les marques sont strictement positives).

Exemple 3.19. *Reprenons les dérivations de l'exemple 3.4. La dérivation d_0 est* bh*. En effet, dans la dérivation marquée associée*

$$\overline{d_0} : \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{a}))) \circ\!\!\to_\epsilon \mathsf{f}(\mathsf{f}^1(\mathsf{a}^2)) \circ\!\!\to_\epsilon \mathsf{f}(\mathsf{a}^2).$$

toutes les marques à la racine des règles appliquées sont à 0. Il en est de même pour la dérivation d_1

$$\overline{d_1} : \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{a}))) \circ\!\!\to_0 \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{a}^1)) \circ\!\!\to_\epsilon \mathsf{f}(\mathsf{a}^1).$$

La dérivation d_2 est bh *puisqu'elle est* $\mathsf{bo}(0)$*. La dérivation d_3 n'est pas* bh*. En effet, dans la dérivation marquée associée*

$$\overline{d_3} : \mathsf{f}(\mathsf{i}(\mathsf{i}(\mathsf{b}))) \circ\!\!\to_{\mathsf{f}(x)\to\mathsf{g}(x),\epsilon} \mathsf{g}(\mathsf{i}^1(\mathsf{i}^2(\mathsf{b}^3))) \circ\!\!\to_{\mathsf{i}(x)\to\mathsf{a},00} \mathsf{g}(\mathsf{i}^1(\mathsf{a})),$$

la deuxième règle appliquée a pour racine un symbole avec une marque 2. En appliquant d'abord la deuxième règle, puis la première, on obtient une dérivation bh*. La dérivation d_4 n'est pas* bh*. En effet, dans la dérivation marquée associée*

$$\overline{d_4} : \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{a}))) \circ\!\!\to_{\mathsf{f}(x)\to\mathsf{i}(x),\epsilon} \mathsf{i}(\mathsf{f}^1(\mathsf{g}^2(\mathsf{a}^3))) \circ\!\!\to_{x\to\mathsf{h}(x,\mathsf{a}),000} \mathsf{i}(\mathsf{f}^1(\mathsf{g}^2(\mathsf{h}(\mathsf{a}^3,\mathsf{a})))),$$

il y a des marques non nulles situées (strictement) au-dessus de 000 *dans* $\mathsf{i}(\mathsf{f}^1(\mathsf{g}^2(\mathsf{a}^3)))$ *lors de l'application de la règle $x \to \mathsf{h}(x,\mathsf{a})$. Le deuxième pas n'est pas* bh*, et la dérivation ne l'est donc pas non plus.*

Définition 3.20. *Nous utiliserons les notations suivantes :*

- *La relation binaire* ${}_{\mathsf{bh}}\!\!\to_{\mathcal{R}}$ *sur* $\overline{\mathcal{T}} \times \overline{\mathcal{T}}$ *est définie par* $\overline{s}\ {}_{\mathsf{bh}}\!\circ\!\!\to_{\mathcal{R}} \overline{t}$ *s'il existe un pas de réécriture marqué* bh *entre s et t.*
- *La relation binaire* ${}_{\mathsf{bh}}\!\circ\!\!\to^*_{\mathcal{R}}$ *sur* $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$ *est définie par* $s\ {}_{\mathsf{bh}}\!\!\to^*_{\mathcal{R}} t$ *si la dérivation marquée associée est* bh*.*

Nous préciserons parfois la règle appliquée, la position où cette règle est appliquée, la version marquée du membre gauche, la substitution utilisée, et la substitution utilisée sans les marques et noterons $\overline{s}\ {}_{\mathsf{bo}(k)}\!\circ\!\!\to_{\mathcal{R},l\to r,\overline{l},v,\overline{\sigma},\sigma} \overline{t}$. Nous nous autoriserons à faire figurer l'un ou plusieurs de ces indices.

3.4.1 Termes et dérivations fortement marqués

Comme dans le cas de la stratégie $\mathsf{bo}(k)$, les marques qui apparaissent sur les termes d'une dérivation bh ont une certaine forme.

Définition 3.21 (Terme fortement marqué)**.** *Un terme $\overline{t} \in \overline{\mathcal{T}}(\mathcal{V})$ est* **fortement marqué** *si pour toute position $v \in \mathcal{P}\mathsf{os}(\overline{t})$, pour toute position $u \prec v$,*

$$\mathsf{m}(\overline{t}/v) = 0 \Rightarrow \mathsf{m}(\overline{t}/u) = 0.$$

Une dérivation marquée est fortement marquée si tout ses termes sont fortement marqués.

Proposition 3.22. *Toute dérivation* bh *commençant par un terme fortement marqué est fortement marquée. Par conséquent, toute dérivation marquée associée à une dérivation* bh *est fortement marquée.*

La prochaine proposition montre que la stratégie bh n'est pas restrictive : toute dérivation peut être remplacée par une dérivation bh. Nous proposons dans le chapitre 5 page 107 une extension de cette notion de dérivation bh aux systèmes linéaires à gauche qui n'est pas non plus restrictive (proposition 5.62 page 153). Dans le cas linéaire, toute dérivation peut être remplacée par une dérivation bh de même longueur.

Proposition 3.23 (Toute dérivation est bh convertible)**.** *Pour tout, $n \in \mathbb{N}$, pour toute dérivation*

$$s \rightarrow^n_{\mathcal{R}} t,$$

il existe une dérivation bh *:*

$$s \;{}_{\mathsf{bh}}\!\!\rightarrow^n_{\mathcal{R}} t.$$

Démonstration. Nous démontrerons ce résultat par récurrence sur n la longueur de la dérivation $s \rightarrow^n_{\mathcal{R}} t$. Si $n = 0$, le résultat est vérifié. Soit $n > 0$. Par hypothèse de récurrence, il existe une dérivation bh

$$\begin{aligned} d : s = \overline{s_0} \;{}_{\mathsf{bh}}\!\circ\!\!\!\rightarrow_{\mathcal{R}, l_0 \rightarrow r_0, v_0} \overline{s_1} \\ \ldots \;{}_{\mathsf{bh}}\!\circ\!\!\!\rightarrow_{\mathcal{R}, l_{n-1} \rightarrow r_{n-1}, v_{n-1}} \overline{s_{n-1}} = \overline{s_{n-1}}[\overline{l_{n-1}}\overline{\sigma_{n-1}}]_{v_{n-1}}, \end{aligned}$$

et un pas

$$\overline{s_{n-1}} = \overline{s_{n-1}}[\overline{l_{n-1}}\overline{\sigma_{n-1}}]_{v_{n-1}} \;\circ\!\!\!\rightarrow_{\mathcal{R}, l_{n-1} \rightarrow r_{n-1}, v_{n-1}} \overline{s_n} = \overline{s_{n-1}}[r_{n-1}(\overline{\sigma_{n-1}} \odot a)]_{v_{n-1}}$$

qui n'est pas nécessairement bh. Il va nous falloir réorganiser la dérivation et appliquer le pas $l_{n-1} \rightarrow r_{n-1}$ au moment voulu, c'est-à-dire à un moment où le redex $l_{n-1}\sigma$ a été formé et où sa racine est marquée par 0.

- Notation : Dans la suite, on note org^i ce qui devrait être noté $\mathsf{org}^i_{d,n-1}(v_{n-1})$. Soit

$$\begin{aligned} \mathsf{o} = \min\{i \mid \mathsf{org}^i \text{ est défini et} \\ \mathsf{m}(\overline{s_{n-i-1}}/\mathsf{org}^i) = 0\}. \end{aligned}$$

— **fait 1 : L'entier o est bien défini.**
Soit j le plus grand entier tel que org^j est bien défini

$$j = \max\{i \mid \mathsf{org}^i \text{ est défini.}\}$$

Montrons que $\mathsf{m}(\overline{s_{n-1-j}}/\mathsf{org}^j) = 0$ pour montrer que o est bien défini. Si $j = n-1$, alors comme $s = \overline{s_0}$ n'est marqué que par des 0, o est bien défini. Sinon, $0 \leq j < n-1$. On distingue trois cas.

— $\mathbf{org}^j \perp v_{n-2-j}$ **ou** $\mathbf{org}^j \prec v_{n-2-j}$**.**
Ce cas n'est pas possible car il contredit le fait que j est maximum : $\mathsf{org}^{j+1} = \mathsf{org}^j$ serait défini.

— $\mathbf{org}^j \succeq v_{n-2-j}$ **et**
$\exists w \in \mathcal{P}\mathsf{os}_{\backslash\mathcal{V}}(r_{n-2-j})$ **tel que** $\mathbf{org}^j = v_{n-2-j} \cdot w$**.**
Dans ce cas

$$\mathsf{m}(\overline{s_{n-1-j}}/\mathsf{org}^j) = \mathsf{m}(r_{n-2-j}/w) = 0,$$

et o est bien défini.

— **$\mathsf{org}^j \succeq v_{n-2-j}$ et $\exists x \in \mathcal{V}\mathsf{ar}(r_{n-2-j}), w \in \mathcal{P}\mathsf{os}(x\sigma_{n-2-j})$ tels que $\mathsf{org}^j = v_{n-2-j} \cdot \mathsf{pos}(r_{n-2-j}, x) \cdot w$.**
Dans ce cas, org^{j+1} est défini et cela contredit le fait que j est un maximum.

L'entier o est donc bien défini.
Supposons que $\mathsf{o} = 0$. Par définition de org, $\mathsf{org}^0 = v_{n-1}$ et par définition de o, $\mathsf{m}(\overline{s_{n-1}}/v_{n-1}) = 0$. D'après la proposition 3.22, pour toute position $u \preceq v_{n-1}$, $\mathsf{m}(\overline{s_{n-1}}/u) = 0$, et le pas

$$\overline{s_{n-1}}[\overline{l_{n-1}\sigma_{n-1}}]_{v_{n-1}} \;{}_{\mathsf{bh}}{\circ\!\!\longrightarrow}\; \overline{s_n}[r_{n-1}(\overline{\sigma_{n-1}} \odot a)]_{v_{n-1}},$$

est bh (que $l \in \mathcal{V}$ ou $l \notin \mathcal{V}$). Le lemme est vérifié. On suppose donc dorénavant dans cette preuve que $\mathsf{o} > 0$.

— **fait 2 : $\forall 0 \leq i \leq \mathsf{o}$, $s_{n-1-i}/\mathsf{org}^i = l_{n-1}\sigma_{n-1}$ et si $i < \mathsf{o}$, $\overline{s_{n-2-i}}[]_{\mathsf{org}^{i+1}} \;{}_{\mathsf{bh}}{\circ\!\!\longrightarrow}\; \overline{s_{n-1-i}}[]_{\mathsf{org}^i}$.**
Ce fait revient juste à montrer qu'aucune règle ne peut être appliquée sous une position org^i. Raisonnons par récurrence sur i. Si $i = 0$, alors $\mathsf{org}^0 = v_{n-1}$ et

$$s_{n-1}/\mathsf{org}^0 = l_{n-1}\sigma_{n-1}.$$

Soit $i > 0$. Par hypothèse de récurrence,

$$s_{n-2-i}/\mathsf{org}^{i+1} = l_{n-1}\sigma_{n-1}.$$

On distingue 3 cas.

— **$\mathsf{org}^i \perp v_{n-2-i}$ ou $\exists x \in \mathcal{V}\mathsf{ar}(r_{n-2-i}), w \in \mathcal{P}\mathsf{os}(x\sigma)$ tels que $\mathsf{org}^i = v_{n-2-i} \cdot \mathsf{pos}(r_{n-2-i}, x) \cdot w$.**
On a

$$s_{n-1-i}/\mathsf{org}^i = s_{n-2-i}/\mathsf{org}^{i+1} = l_{n-1}\sigma_{n-1},$$

et

$$\overline{s_{n-2-i}}[]_{\mathsf{org}^{i+1}} \;{}_{\mathsf{bh}}{\circ\!\!\longrightarrow}_{v_{n-2-i}, l_{n-2-i} \to r_{n-2-i}}\; \overline{s_{n-1-i}}[]_{\mathsf{org}^i}.$$

— **$\exists w \in \mathcal{P}\mathsf{os}_{\setminus\mathcal{V}}(r_{n-2-i})$ tels que $\mathsf{org}^i = v_{n-2-i} \cdot w$.**
Ce cas n'est pas possible, org^{i+1} ne serait pas défini, et o non plus.

— **$\mathsf{org}^i \prec v_{n-2-i}$**
Puisque la dérivation jusqu'à $\overline{s_{n-1-j}}$ est bh, et d'après le lemme 3.22 page 42,

$$\mathsf{m}(\overline{s_{n-1-j}}/\mathsf{org}^i) = 0.$$

Ceci contredit la minimalité de o. Ce cas ne peut se produire.

Ces 2 faits établis, on peut construire la dérivation. On a

$$\overline{s_0} \;{}_{\mathsf{bh}}{\circ\!\!\longrightarrow}^{n-\mathsf{o}-1}\; \overline{s_{n-\mathsf{o}-1}}.$$

D'après le fait 2,

$$\overline{s_{n-\mathsf{o}-1}} = \overline{s_{n-\mathsf{o}-1}}[\widetilde{l_{n-1}}\widetilde{\sigma_{n-1}}]_{\mathsf{org}^{\mathsf{o}}}.$$

Par définition de o, $\mathsf{m}(\widetilde{l_{n-1}}) = 0$. D'après le lemme 3.22, pour toute position $u \prec \mathsf{org}^{\mathsf{o}}$, $\mathsf{m}(\overline{s_{n-\mathsf{o}-1}}/u) = 0$. Il y a un pas

$$\overline{s_{n-\mathsf{o}-1}} \;{}_{\mathsf{bh}}{\circ\!\!\longrightarrow}\; \overline{s_{n-\mathsf{o}-1}}[r_{n-1}(\widetilde{\sigma_{n-1}} \odot 1)]_{\mathsf{org}^{\mathsf{o}}}.$$

On utilise le fait 2 et on obtient

$$\overline{s_{n-\mathsf{o}-1}}[r_{n-1}(\widetilde{\sigma_{n-1}} \odot 1)]_{\mathsf{org}^\circ} \;{}_{\mathsf{bh}}{\circ\!\!\longrightarrow}\; \overline{s_{n-\mathsf{o}}}[\widetilde{r_{n-1}\sigma_{n-1}}]_{\mathsf{org}^{\circ-1}}.$$

En répétant cette opération, on fabrique une dérivation

$$\overline{s_{n-\mathsf{o}}}[r_{n-1}(\widetilde{\sigma_{n-1}} \odot 1)]_{\mathsf{org}^\circ} \;{}_{\mathsf{bh}}{\circ\!\!\longrightarrow}^{\circ}\; \widehat{t} = \widehat{s_{n-1}}[\widehat{r_{n-1}\sigma_{n-1}}]_{v_{n-1}}.$$

Il y a une dérivation de longueur n

$$\overline{s_0} \;{}_{\mathsf{bh}}{\circ\!\!\longrightarrow}^{n-\mathsf{o}-1}\; \overline{s_{n-\mathsf{o}-1}} \;{}_{\mathsf{bh}}{\circ\!\!\longrightarrow}\; \overline{s_{n-\mathsf{o}-1}}[r_{n-1}(\widetilde{\sigma_{n-1}} \odot 1)]_{\mathsf{org}^\circ} \;{}_{\mathsf{bh}}{\circ\!\!\longrightarrow}^{\circ}\; \widehat{t}.$$

Le résultat est vérifié. □

3.5 Systèmes fortement k-bornés

Nous introduisons maintenant les dérivations bh qui sont bo(k) (dérivations bhbo(k)), ainsi que la classe des systèmes LFBO(k) (les systèmes pour lesquels toute dérivation bh est bo(k)). Dans le cas de systèmes de réécriture de mots, la notion de dérivation bhbo(k) apparaît sous différentes formes et sous d'autres noms. Par exemple la notion de dérivation basique à gauche introduite dans [76] est très proche de notre définition de dérivation inverse bhbo(0). Cette appellation de bh est reprise (et légèrement modifiée) dans [79]. Notons aussi que la notion de dérivation monoadique pour les "restarting automaton" présentée dans [60] est très proche de la notion de dérivation bhbo(0). La notion de dérivation bhbo(k) présentée ici est directement inspirée de la notion de dérivation bu(k) introduite dans [30], et les classes associées à ces stratégies correspondent (voir le chapitre 3.12 page 80).

Définition 3.24 (Dérivation marquée bhbo(k))**.** *Un pas de réécriture marquée est* **bh et *k*-borné** *(*bhbo(k)*) s'il est* bh *et s'il est* bo(k)*. Une dérivation marquée* $s \circ\!\!\rightarrow^*_{\mathcal{R}} t$ *est* **bh et *k*-bornée** *(*bhbo(k)*) si tous les pas sont* bhbo(k)*.*

Ainsi, un pas de réécriture marqué est bhbo(k) s'il satisfait les conditions 3.4 et 3.5 de la définition 3.6, et les conditions 3.6 et 3.7 de la définition 3.18.

Définition 3.25 (Dérivation bhbo(k))**.** *Une dérivation* $d : s \rightarrow^*_{\mathcal{R}} t$ *est* **bhbo(*k*)** *si la dérivation marquée associée* $\overline{d}$ *est* bhbo(k)*.*

Notez que la composition de deux dérivations marquées bhbo(k) est une dérivation bhbo(k). Cela n'est pas vrai pour les dérivations bhbo(k) qui ne sont pas marquées.

Définition 3.26. *Nous utiliserons la notation suivante :*

— *La relation binaire* ${}_{\mathsf{bhbo}(k)}{\circ\!\!\longrightarrow}_{\mathcal{R}}$ *sur* $\overline{\mathcal{T}} \times \overline{\mathcal{T}}$ *est définie par* $\overline{s} \;{}_{\mathsf{bhbo}(k)}{\circ\!\!\longrightarrow}_{\mathcal{R}}\; \overline{t}$ *s'il existe un pas de réécriture marquée* bhbo(k) *entre* $\overline{s}$ *et* $\overline{t}$*.*

Proposition 3.27. *Toute dérivation commençant par un terme fortement bien marqué et qui est* bh *est fortement bien marquée. Par conséquent, toute dérivation marquée associée à une dérivation* bh *est fortement marquée.*

Exemple 3.28. *Reprenons les dérivations de l'exemple 3.4, et les résultats obtenus dans les exemples 3.8 et 3.19. Nous avons vu que les dérivations* d_0*,* d_1*, et* d_2 *sont* bh *alors que* d_3 *et* d_4 *ne le sont pas (et donc ne sont* bhbo(k) *pour aucun* k*). Comme* d_0 *est de plus* bo(1)*,* d_0 *est* bhbo(1)*. Les dérivation* d_1 *et* d_2 *sont elles* bo(0)*. Elles sont donc* bhbo(0)*.*

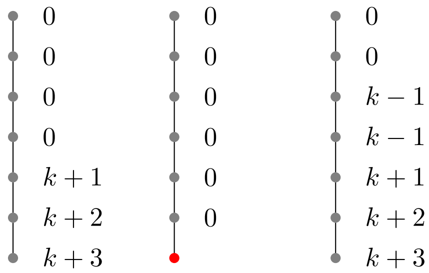

FIGURE 11 – Trois branches fortement bien marquées pour k (en rouge, la position d'une variable).

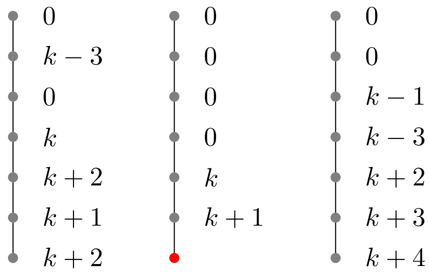

FIGURE 12 – Trois branches pas fortement bien marquées pour k (en rouge, la position d'une variable).

3.5.1 Termes fortement k-bien marqués et dérivations $\mathsf{bhbo}(k)$

Définition 3.29 (Terme fortement bien marqué pour k)**.** *Un terme $\bar{t} \in \overline{\mathcal{T}}(\mathcal{V})$ est* **fortement bien marqué pour k** *s'il est fortement marqué et bien marqué pour k. Une dérivation marquée est* **fortement bien marquée pour k** *si tout ses termes sont fortement bien marqués pour k*

Nous avons représenté sur la figure 11 trois branches fortement bien marquées pour k, et sur la figure 12 trois branches qui ne sont pas fortement bien marquées pour k.

Proposition 3.30. *Toute dérivation commençant par un terme fortement bien marqué pour k et qui est $\mathsf{bhbo}(k)$ est fortement bien marquée pour k. Par conséquent, toute dérivation marquée associée à une dérivation $\mathsf{bhbo}(k)$ est fortement bien marquée pour k.*

Démonstration. C'est une conséquence directe de la proposition 3.22 page 42 et de la proposition 3.27 page 45 □

3.5.2 La classe $\mathsf{LFBO}(k)$

Définition 3.31 (La classe $\mathsf{LFBO}(k)$)**.** *Un système linéaire est* **fortement k-borné** *si toute dérivation bh est $\mathsf{bo}(k)$. La classe des systèmes linéaires* **fortement k-bornés** *est notée $\mathsf{LFBO}(k)$. La classe des* **systèmes linéaires**

fortement bornés *est*
$$\mathsf{LFBO} := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathsf{LFBO}(k).$$

Un système est $\mathsf{LBO}(k)$ si toute dérivation peut être transformée en dérivation $\mathsf{bo}(k)$. Pour la classe $\mathsf{FBO}(k)$, nous demandons que toute dérivation bh soit $\mathsf{bo}(k)$. C'est plus restrictif, et c'est pour cela que nous parlons de système fortement $\mathsf{bo}(k)$. Puisque la stratégie bh n'est pas restrictive, LFBO est bien une sous-classe de LBO. Il est possible que pour un système donné, toute dérivation soit transformable en dérivation $\mathsf{bhbo}(k)$ sans pour autant que le système appartienne à la classe $\mathsf{LFBO}(k)$.

Lemme 3.32. $\mathsf{LFBO}(k) \subset \mathsf{LBO}(k)$.

Démonstration. Soit $\mathcal{R} \in \mathsf{LFBO}(k)$. Par définition, il faut montrer que
$$\to^*_{\mathcal{R}} = {}_{\mathsf{bo}(k)}\!\to^*_{\mathcal{R}} .$$
Clairement,
$${}_{\mathsf{bo}(k)}\!\to^*_{\mathcal{R}} \subseteq \to^*_{\mathcal{R}} .$$
Montrons que
$$\to^*_{\mathcal{R}} \subseteq {}_{\mathsf{bo}(k)}\!\to^*_{\mathcal{R}} .$$
Soit $d : s \to^*_{\mathcal{R}} t$ une dérivation. D'après la proposition 3.23, il existe une dérivation effectuée de bas en haut
$$d' : s \ {}_{\mathsf{bh}}\!\to^*_{\mathcal{R}} t.$$
Par définition de la classe $\mathsf{LFBO}(k)$, cette dérivation est $\mathsf{bo}(k)$, et
$$s \ {}_{\mathsf{bo}(k)}\!\to^*_{\mathcal{R}} t.$$
Nous avons montré que $\to^*_{\mathcal{R}} = {}_{\mathsf{bo}(k)}\!\to^*_{\mathcal{R}}$. Le système $\mathcal{R}$ est bien k-borné. L'inclusion est stricte (voir l'exemple suivant 3.33). □

Exemple 3.33. *Le système $\mathcal{R}_0 = \{\mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) \to \mathsf{f}(x)\}$ n'est pas $\mathsf{LFBO}(0)$. En effet, pour tout k, il existe une dérivation bh qui n'est pas $\mathsf{bo}(k)$ et qui part d'un terme de la forme $\mathsf{f}(\ldots\mathsf{f}(\mathsf{a})\ldots)$ avec $k+2$ symboles f :*
$$\mathsf{f}(\mathsf{f}(\ldots\mathsf{f}(\mathsf{a}))) \circ\!\!\to_\epsilon \mathsf{f}(\mathsf{f}^1(\ldots\mathsf{f}^{k+1}(\mathsf{a}^{k+2}))) \circ\!\!\to_\epsilon \ldots\mathsf{f}(\mathsf{f}^{k+1}(\mathsf{a}^{k+2})) \circ\!\!\to \mathsf{f}(\mathsf{a}^{k+2}).$$
Toutefois, le système est $\mathsf{LBO}(0)$. En effet, nous pouvons réorganiser la dérivation et obtenir une dérivation $\mathsf{bo}(0)$:
$$\mathsf{f}(\mathsf{f}(\ldots\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{a})))) \circ\!\!\to \mathsf{f}(\mathsf{f}(\ldots\mathsf{f}(\mathsf{a}^1))) \circ\!\!\to \ldots\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{a}^1)) \circ\!\!\to \mathsf{f}(\mathsf{a}^1).$$
Les systèmes $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_3$ sont $\mathsf{LBO}(1)$: toute dérivation bh est $\mathsf{bo}(1)$. Les systèmes $\mathcal{R}_4$ et $\mathcal{R}_6$ sont $\mathsf{LBO}(0)$: toute dérivation bh est $\mathsf{bo}(0)$. Le système $\mathcal{R}_5$ n'appartient pas à $\mathsf{LFBO}(k)$. En effet, comme pour le système $\mathcal{R}_0$, nous pouvons fabriquer des dérivations $\mathsf{bo}(k+1)$ qui ne sont pas $\mathsf{bo}(k)$ en allant de $\mathsf{h}(\mathsf{f}(\ldots\mathsf{f}(\mathsf{a})), \mathsf{i}(\ldots\mathsf{i}(\mathsf{a})))$ (avec $k+2$ symboles f et $k+2$ symboles i) à $\mathsf{h}(\mathsf{f}(\mathsf{a}), \mathsf{i}(\mathsf{a}))$
$$\begin{aligned}&\mathsf{h}(\mathsf{f}(\mathsf{f}(\ldots\mathsf{f}(\mathsf{a}))), \mathsf{i}(\mathsf{i}(\ldots\mathsf{i}(\mathsf{a})))) \circ\!\!\to_\epsilon \mathsf{h}(\mathsf{f}(\ldots\mathsf{f}^{k+1}(\mathsf{a}^{k+2})), \mathsf{i}(\ldots\mathsf{i}^{k+1}(\mathsf{a}^{k+2})))\\ &\ldots\mathsf{h}(\mathsf{f}(\mathsf{f}^{k+1}(\mathsf{a}^{k+2})), \mathsf{i}(\mathsf{i}^{k+1}(\mathsf{a}^{k+2}))) \circ\!\!\to_\epsilon \mathsf{h}(\mathsf{f}(\mathsf{a}^{k+2}), \mathsf{i}(\mathsf{a}^{k+2})).\end{aligned}$$
C'est l'unique dérivation dans $\mathcal{R}_5$ qui va de $\mathsf{h}(\mathsf{f}(\ldots\mathsf{f}(\mathsf{a})), \mathsf{i}(\ldots\mathsf{i}(\mathsf{a})))$ à $\mathsf{h}(\mathsf{f}(\mathsf{a}), \mathsf{i}(\mathsf{a}))$. Le système $\mathcal{R}_5$ n'appartient donc pas à LBO. L'inverse du système $\mathcal{R}_5$ (i.e le système $\{r \to l \mid l \to r \in \mathcal{R}_5\}$) est lui $\mathsf{LFBO}(0)$.

3.6 Les différents problèmes traités

Nous avons défini les stratégies $\mathsf{bo}(k)$ et bh et les classes de systèmes associées $\mathsf{LBO}(k)$ et $\mathsf{LFBO}(k)$. Dans cette section, nous présentons les différents problèmes que nous allons résoudre dans ce chapitre. Dans la section 3.8 page 65, nous démontrons que la stratégie $\mathsf{bo}(k)$ inverse-préserve (i-préserve) la reconnaissabilité, c'est-à-dire le théorème suivant.

Théorème 3.34 (Inverse-préservation de la reconnaissabilité pour $\mathsf{bo}(k)$)**.** *Pour tout système linéaire $\mathcal{R}$, et tout reconnaissable $T \in \mathsf{Rec}(\mathcal{F})$, l'ensemble*

$$({}_{\mathsf{bo}(k)}\!\!\rightarrow^*_{\mathcal{R}})[T] := \{s \mid \exists t \in T, s \;{}_{\mathsf{bo}(k)}\!\!\rightarrow^* t\}$$

est reconnaissable et peut être construit.

En corollaire, nous aurons que tout système k-borné i-préserve la reconnaissabilité. Nous nous servirons de ce résultat pour démontrer que le problème de l'appartenance à $\mathsf{LFBO}(k)$ est décidable pour cette classe (section 3.11).

Dans la section 3.9, nous démontrons que les problèmes de terminaison pour la stratégie $\mathsf{bo}(k)$ sont décidables. Avant de présenter ces problèmes, nous avons besoin de définir la notion de dérivation infinie $\mathsf{bo}(k)$.

Définition 3.35 (Dérivation infinie $\mathsf{bo}(k)$)**.** *Soit $s \in \mathcal{T}$. Une* **dérivation infinie bo(k)** *qui part de s est une suite de termes $(\overline{s_i})_{i\in\mathbb{N}}$ telle que*

- *$\overline{s_0} = s$,*
- *pour tout $i \in \mathbb{N}$,*

$$\overline{s_i} \;{}_{\mathsf{bo}(k)}\!\circ\!\!\rightarrow_{\mathcal{R}} \overline{s_{i+1}}.$$

Le système $\mathcal{R}$ **bo(k)-termine sur s** *s'il n'existe pas de dérivation infinie $\mathsf{bo}(k)$ qui part de s. Le système $\mathcal{R}$* **bo(k)-termine uniformément** *(u-$\mathsf{bo}(k)$-termine) si pour tout $s \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$, il $\mathsf{bo}(k)$-termine sur s.*

Remarquons que s'il existe une suite infinie de termes $(\overline{s_i})_{i\in\mathbb{N}}$ tels que

$$\forall i \in \mathbb{N}, \overline{s_i} \;{}_{\mathsf{bo}(k)}\!\circ\!\!\rightarrow_{\mathcal{R}} \overline{s_{i+1}},$$

alors $\mathcal{R}$ ne $\mathsf{bo}(k)$-termine pas sur s_0, et ce quelles que soient les marques sur $\overline{s_0}$. Nous nous contenterons donc parfois de démontrer l'existence d'une telle suite pour démontrer qu'un système ne $\mathsf{bo}(k)$-termine pas.

Voici les problèmes de terminaison pour la stratégies $\mathsf{bo}(k)$.

Problème 3.36 (Terminaison de la stratégie $\mathsf{bo}(k)$)**.** *Le problème de* **terminaison de la stratégie bo(k)** *($\mathsf{bo}(k)$-terminaison) est le suivant :*
ENTRÉE : *Un système linéaire $\mathcal{R}$ et un terme $s \in \mathcal{T}$.*
QUESTION : *Le système $\mathcal{R}$ $\mathsf{bo}(k)$-termine-t-il sur s ?*

Problème 3.37 (u-terminaison de la stratégie $\mathsf{bo}(k)$)**.** *Le problème de la* **terminaison uniforme de la stratégie bo(k)** *(u-$\mathsf{bo}(k)$-terminaison) est le suivant :*
ENTREE : *Un système linéaire $\mathcal{R}$.*
QUESTION : *Le système $\mathcal{R}$ u-$\mathsf{bo}(k)$-termine-t-il ?*

Un système peut $\mathsf{bo}(k)$-terminer sur s sans terminer sur s (dans le cas d'une boucle $s \to_{\mathcal{R}}^{*} s$ uniquement). Par contre, s'il ne $\mathsf{bo}(k)$-termine pas sur s, il ne termine pas sur s. Nous démontrerons que le problème de la terminaison (sans stratégie) est décidable pour la classe $\mathsf{LBO}(k)$. Pour la u-terminaison , nous verrons que pour les systèmes de la classe $\mathsf{LFBO}(k)$, $\mathsf{bo}(k)$-terminer sur un terme équivaut à terminer sur ce terme. Ceci nous permettra de montrer que le problème de la u-terminaison est décidable pour la sous-classe $\mathsf{LFBO}(k)$. Nous n'avons pas réussi à étendre ce résultat à l'ensemble de la classe $\mathsf{LBO}(k)$, et nous ne savons pas si ce problème est décidable. Nous conjecturons que, si l'on se restreint aux systèmes de réécriture de mots ce problème est décidable (nous pensons qu'il est possible de détecter la présence éventuelle de boucles $s \to_{\mathcal{R}}^{*} s$ à l'aide d'un automate à délai borné, automate introduit dans [38]). Nous allons ensuite définir les deux problèmes de terminaison inverse pour la stratégie $\mathsf{bo}(k)$. Tout d'abord, nous devons définir la notion de dérivation infinie inverse-$\mathsf{bo}(k)$.

Définition 3.38 (Dérivation infinie inverse-$\mathsf{bo}(k)$)**.** *Soit $s \in \mathcal{T}$. Une* **dérivation infinie inverse-bo(k) qui part d'un terme s** *(i-$\mathsf{bo}(k)$-infinie) est une suite de termes bien marqués pour k $(\overline{s_i})_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $s_0 = s$ et $\forall i \in \mathbb{N}$,*

$$\overline{s_{i+1}}\ {}_{\mathsf{bo}(k)}\!\circ\!\!\longrightarrow_{\mathcal{R}} \overline{s_i}.$$

Le système $\mathcal{R}$ **inverse-bo(k)-termine sur s** *(i-$\mathsf{bo}(k)$-termine) s'il n'existe pas de dérivation i-$\mathsf{bo}(k)$-infinie qui part de s. Le système $\mathcal{R}$* **inverse-bo(k)-termine uniformément** *(i-u-$\mathsf{bo}(k)$-termine) si pour tout $s \in \mathcal{T}$, il i-$\mathsf{bo}(k)$-termine sur s.*

Clairement, nous pouvons omettre la condition "bien marqués" pour k dans la définition de dérivation i-$\mathsf{bo}(k)$ infinie. Les deux problèmes de terminaison inverse pour la stratégie $\mathsf{bo}(k)$ sont les suivants.

Problème 3.39 (Problème de l'i-$\mathsf{bo}(k)$-Terminaison)**.** *Le problème de* **l'inverse terminaison de la stratégie bo(k)** *(i-$\mathsf{bo}(k)$-terminaison) est le suivant :*
ENTRÉE : *Un système linéaire $\mathcal{R}$ et un terme $s \in \mathcal{T}$.*
QUESTION : *Le système $\mathcal{R}$ i-$\mathsf{bo}(k)$-termine-t-il sur s ?*

Problème 3.40 (Problème de l'inverse terminaison uniforme de la stratégie $\mathsf{bo}(k)$)**.** *Le problème de l'***i-u-terminaison de la stratégie bo(k)** *(i-u-$\mathsf{bo}(k)$-terminaison) est le suivant :*
ENTREE : *Un système linéaire $\mathcal{R}$.*
QUESTION : *Le système $\mathcal{R}$ i-u-$\mathsf{bo}(k)$-termine-t-il ?*

Exemple 3.41. *Le système $\mathcal{R}_7 = \{\mathsf{f}(x) \to \mathsf{g}(x), \mathsf{g}(\mathsf{a}) \to \mathsf{f}(\mathsf{a})\}$ est $\mathsf{LBO}(0)$ et u-$\mathsf{bo}(0)$-termine, mais il ne u-$\mathsf{bo}(1)$ termine pas puisqu'il y a une dérivation infinie*

$$\mathsf{f}(\mathsf{a}) \circ\!\!\longrightarrow_{\mathsf{f}(x)\to\mathsf{g}(x),\epsilon} \mathsf{g}(\mathsf{a}^1) \circ\!\!\longrightarrow_{\mathsf{g}(\mathsf{a})\to\mathsf{f}(\mathsf{a}),\epsilon} \mathsf{f}(\mathsf{a}) \ldots.$$

Le système $\mathcal{R}_0 = \{\mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) \to \mathsf{f}(x)\}$ ne i-u-$\mathsf{bo}(0)$ termine pas puisqu'il y a une dérivation $\mathsf{bo}(0)$ inverse infinie

$$\ldots \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{a}^1))) \to_0 \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{a}^1)) \to_\epsilon \mathsf{f}(\mathsf{a}^1).$$

Le système $\mathcal{R}_4$ ne u-$\mathsf{bo}(0)$ termine pas puisqu'il y a une dérivation infinie $\mathsf{bo}(0)$

$$\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{a})) \circ\!\!\longrightarrow_{\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))\to\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{i}(x))),\epsilon} \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{i}(\mathsf{a}^1))) \circ\!\!\longrightarrow_{\mathsf{i}(x)\to\mathsf{g}(x),00} \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{a}^1)))$$
$$\circ\!\!\longrightarrow_{\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))\to\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{i}(x))),0} \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{i}(\mathsf{a}^1)))) \ldots.$$

Le système $\mathcal{R}_6$ ne u-$\mathsf{bo}(0)$ *termine pas puisqu'il y a une dérivation infinie* $\mathsf{bo}(0)$

$$\mathsf{b} \circ\!\!\rightarrow_{x \to \mathsf{h}(x,\mathsf{a}),\epsilon} \mathsf{h}(\mathsf{b}^1, \mathsf{a}) \circ\!\!\rightarrow_{x \to \mathsf{h}(x,\mathsf{a}),\epsilon} \mathsf{h}(\mathsf{h}^1(\mathsf{b}^2, \mathsf{a}^2), \mathsf{a} \ldots.$$

3.7 Simulation des dérivations $\mathsf{bo}(k)$

Pour le restant du chapitre, $\mathcal{A} = (\mathcal{F}, \mathcal{Q}, \mathcal{Q}_f, \Gamma)$ désigne un automate complet déterministe.

3.7.1 Présentation de la simulation

Dans ce chapitre, nous montrons que les dérivations $\mathsf{bo}(k)$ peuvent être simulées par un *SRT* clos. C'est-à-dire qu'il existe un système clos $(\mathcal{F} \cup \mathcal{Q}, \mathcal{S})$ tel que : pour tout $q \in \mathcal{Q}$, $n \in \mathbb{N}$ et tout $s \in \mathcal{T}$,

$$s \ {}_{\mathsf{bo}(k)}\!\!\rightarrow^n_{\mathcal{R}} \ \rightarrow^*_{\mathcal{A}} q$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\text{il existe une dérivation } s \rightarrow^*_{\mathcal{S} \cup \mathcal{A}} q \text{ où } n \text{ pas sont effectués dans } \mathcal{S}.$$

Nous allons d'abord montrer qu'il est possible de se ramener à l'étude du cas $k = 0$, et nous allons ensuite définir un *SRT* clos $(\mathcal{F} \cup \mathcal{Q}, \mathcal{S})$ qui simule les dérivations $\mathsf{bo}(0)$. Ce *SRT* clos $\mathcal{S}$ est obtenu à partir de $\mathcal{R}$ en prenant pour chaque règle $l \to r \in \mathcal{R}$, l'ensemble des règles $l\tau \to r\tau$, où τ est une substitution qui envoie chaque variable sur un état :

$$\mathcal{S} := \{l\tau \to r\tau \mid l \to r \in \mathcal{R}, \tau : \mathcal{V} \to \mathcal{Q}\}.$$

La simulation va reposer sur deux lemmes principaux : le lemme de projection 3.52, et le lemme de relèvement 3.54 représentés respectivement sur les figures 13 et 14. Le lemme de projection 3.52 permet d'associer à chaque pas de réécriture $\mathsf{bo}(0)$ dans $\mathcal{R}$ une dérivation dans $\mathcal{S} \cup \mathcal{A}$ avec un pas dans $\mathcal{S}$ qui va de $\mathsf{Top}_0(\overline{s})$ à $\mathsf{Top}_0(\overline{t})$, où pour un terme $\overline{s}$ bien marqué pour 0, le terme $\mathsf{Top}_0(\overline{s})$ est obtenu à partir de $\overline{s}$ en remplaçant tous les sous-termes "inutiles" dans une dérivation $\mathsf{bo}(0)$ par leur forme normale en considérant $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ (c'est-à-dire en remplaçant chaque sous-terme $\overline{s}/u$ tel que $\mathsf{m}(\overline{s}/u) = 1$ par l'état $\overline{t}/u \downarrow_{\mathcal{A}^{\mathbb{N}}}$, voir figure 15 page 53).

Grâce à ce lemme, nous obtenons la première partie de la simulation : pour tout $q \in \mathcal{Q}$, $n \in \mathbb{N}$ et tout $s \in \mathcal{T}$,

$$s \ {}_{\mathsf{bo}(0)}\!\!\rightarrow^n_{\mathcal{R}} \ \rightarrow^*_{\mathcal{A}} q$$
$$\Rightarrow$$
$$\text{il existe une dérivation } s \rightarrow^*_{\mathcal{S} \cup \mathcal{A}} q \text{ où } n \text{ pas sont effectués dans } \mathcal{S}.$$

Le lemme de relèvement 3.54 permet de transformer une dérivation

$$\overline{s'} \rightarrow^*_{\mathcal{A}^{\mathbb{N}}} \overline{s} \rightarrow_{\mathcal{S}} \overline{t}$$

en une dérivation

$$\overline{s'} \ {}_{\mathsf{bo}(0)}\!\!\rightarrow_{\mathcal{R}} \overline{t'} \rightarrow^*_{\mathcal{A}^{\mathbb{N}}} \overline{t}.$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\overline{s} \arrow[rr, "\mathsf{bo}(0)"', "\mathcal{R}"'] \arrow[d, dashed, "\mathcal{A}^{\geq 1}"', "*"] & & \overline{t} \arrow[d, dashed, "\mathcal{A}^{\geq 1}"', "*"] \\
\mathsf{Top}_0(\overline{s}) \arrow[r, dashed, "*", "\mathcal{A}"'] & {} \arrow[r, dashed, "\mathcal{S}"'] & \mathsf{Top}_0(\overline{t})
\end{tikzcd}$$

Figure 13 – Le lemme de projection pour $\mathsf{bo}(0)$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
& \overline{t'} \arrow[dr, dashed, "\mathcal{A}^{\mathbb{N}}"', "*"] & \\
\overline{s'} \arrow[ur, dashed, "\mathsf{bo}(0)"', "\mathcal{R}"'] \arrow[r, "*", "\mathcal{A}^{\mathbb{N}}"'] & \overline{s} \arrow[r, "\mathcal{S}"'] & \overline{t}
\end{tikzcd}$$

Figure 14 – Le lemme de relèvement pour $\mathsf{bo}(0)$.

Ce lemme permet d'obtenir la deuxième partie de la simulation : pour tout $q \in \mathcal{Q}$, $n \in \mathbb{N}$ et tout $s \in \mathcal{T}$,

$$\text{il existe une dérivation } s \to^*_{\mathcal{S}\cup\mathcal{A}} q \text{ où } n \text{ pas sont effectués dans } \mathcal{S}$$
$$\Rightarrow$$
$$s \;{}_{\mathsf{bo}(0)}\!\!\to^n_{\mathcal{R}} \;\to^*_{\mathcal{A}} q.$$

3.7.2 Le Top_k d'un terme

Dans cette section, nous définissons pour tout terme $\bar{t}$ bien marqué pour k, le terme $\mathsf{Top}_k(\bar{t})$ qui est obtenu à partir de $\bar{t}$ en remplaçant les sous-termes "inutiles" dans une dérivation $\mathsf{bo}(k)$ par leur forme normale modulo $\mathcal{A}^{\geq k+1}$ (voir figure 15 où les sous-termes "inutiles" sont représentés en rouge). Nous verrons dans la remarque 3.43 que ces sous-termes sont ceux dont la marque à la racine est $k+1$). Nous étendons la notion de termes bien marquées pour k aux termes contenant des états : les états sont alors traités comme des variables puisqu'ils n'ont pas de marques, et si $\bar{t}$ est bien marqué pour k, alors pour tout $u \in \mathcal{P}\mathsf{os}_{\mathcal{Q}}(t)$ nous avons

$$v \prec u \Rightarrow \mathsf{m}(\bar{t}/v) \leq k.$$

Définition 3.42 (Domaine utile)**.** $\mathsf{Topd}_k(\bar{t})$ *Soit* $\bar{t} \in \overline{\mathcal{T}}(\mathcal{Q},\mathcal{V})$ *un terme bien marqué pour* k*. Le* **domaine utile** *noté*

$$\mathsf{Topd}_k(\bar{t})$$

est le sous-domaine de $\mathcal{P}\mathsf{os}(t)$ *contenant toutes les positions n'ayant au-dessus d'elles que des marques inférieures ou égale à* k *:*

$$\mathsf{Topd}_k(\bar{t}) := \{u \in \mathcal{P}\mathsf{os}(t) \mid \forall v \prec u, \mathsf{m}(\bar{t}/v) \leq k\}.$$

Remarque 3.43. *L'hypothèse "*$\bar{t}$ *est bien marqué pour* k*" dans la définition 3.42 permet d'assurer que* $\mathsf{Topd}_k(\bar{t})$ *est bien un sous-domaine de* $\mathcal{P}\mathsf{os}(t)$*, et que ce sous-domaine contient* $\mathcal{P}\mathsf{os}_{\mathcal{V}}(t)$*. Il peut y avoir à une position* $u \in \mathsf{Topd}_k(\bar{t})$ *une marque* $k+1$ *sur* t*, mais pas de marque* $k+j$*, avec* $j > 1$ *puisqu'il est bien marqué pour* k*. Ce sous-domaine de* $\mathcal{P}\mathsf{os}(t)$ *est accessible par* $\mathcal{A}^{\geq k+1}$*. Comme* $\bar{t}$ *est bien marqué pour* k*, nous pouvons aussi définir l'ensemble* $\mathsf{Topd}_k(\bar{t})$ *comme l'ensemble des positions ayant une marque inférieure ou égale à* $k+1$

$$\mathsf{Topd}_k(\bar{t}) = \{u \in \mathcal{P}\mathsf{os}(t) \mid \mathsf{m}(\bar{t}/u) \leq k+1\}.$$

La remarque 3.43 garantie la correction de la définition qui suit.

Définition 3.44 (Top_k d'un terme)**.** *Soit* $\bar{t}$ *un terme bien marqué pour* k*. Le terme* $\mathsf{Top}_k(\bar{t})$ *est le terme*

$$\mathsf{Top}_k(\bar{t}) := \mathsf{Red}_{\mathcal{A}^{\geq k+1}}(\bar{t}, \mathsf{Topd}_k(\bar{t})).$$

Cette définition est étendue aux substitutions :

$$\mathsf{Top}_k(\sigma) : x \mapsto \mathsf{Top}_k(x\sigma),$$

et aux ensembles T *de termes bien marqués pour* k *:*

$$\mathsf{Top}(T) = \{Top(\bar{t}) \mid \bar{t} \in T\}.$$

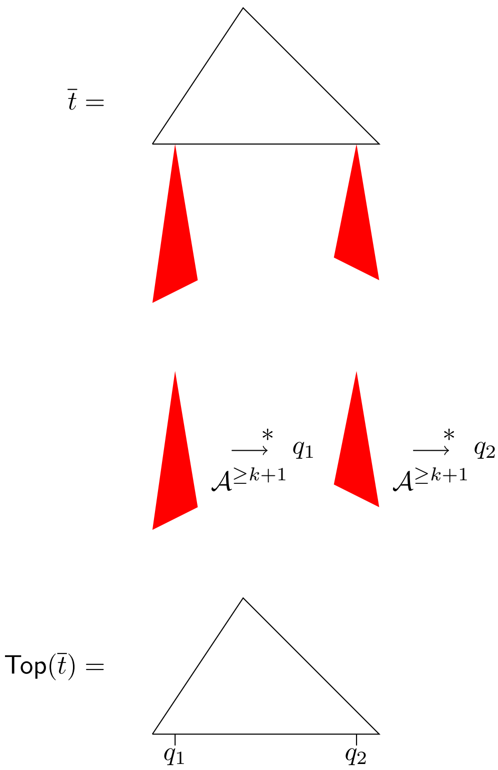

FIGURE 15 – Le terme $\mathsf{Top}_k(\bar{t})$.

Lemme 3.45. *Pour tout terme bien marqué pour k, $\bar{t}$, $\mathsf{Top}_k(\bar{t})$ est bien défini.*

Démonstration. En utilisant la remarque 3.43, comme $\mathsf{Topd}_k(\bar{t})$ est un domaine accessible de $\mathcal{P}\mathsf{os}(t)$ par $\mathcal{A}^{\geq k+1}$ et comme $\geq k+1$ est déterministe est complet nous avons

$$\bar{t} \to^*_{\mathcal{A}_{\geq k+1}} \mathsf{Top}_k(\bar{t}).$$

□

Exemple 3.46. *Nous avons vu dans l'exemple 3.14 que les termes*

$$\mathsf{f}^1(\mathsf{h}(\mathsf{a}^2,\mathsf{a}^3)),\ \mathsf{f}^1(\mathsf{h}^1(\mathsf{a}^0,\mathsf{a}^2)),\ \mathsf{f}^2(\mathsf{h}^4(\mathsf{a}^5,\mathsf{a}^5)),\ \mathsf{f}(\mathsf{h}^3(\mathsf{a}^4,\mathsf{a}^4)))$$

sont bien marqués pour 2*. Si l'on considère l'automate $\mathcal{A}$ complet déterministe $\mathcal{A}$ qui a un seul état q, nous obtenons*

$$\mathsf{Top}_2(\mathsf{f}^1(\mathsf{h}(\mathsf{a}^2,\mathsf{a}^3))) = \mathsf{f}^1(\mathsf{h}(\mathsf{a}^2,q)),\ \mathsf{Top}_2(\mathsf{f}^1(\mathsf{h}^1(\mathsf{a}^0,\mathsf{a}^2))) = \mathsf{f}^1(\mathsf{h}^1(\mathsf{a}^0,\mathsf{a}^2)),$$
$$\mathsf{Top}_2(\mathsf{f}^2(\mathsf{h}^4(\mathsf{a}^5,\mathsf{a}^5))) = \mathsf{f}^2(q),\ \mathsf{Top}_2(\mathsf{f}(\mathsf{h}^3(\mathsf{a}^4,\mathsf{a}^4)))) = \mathsf{f}(q).$$

Nous allons maintenant énoncer quelques propriétés de Top_k.

Lemme 3.47 (Propriétés de Top_k)**.** *Soient $\bar{t} \in \overline{\mathcal{T}}(\mathcal{V})$ un terme bien marqué pour k, $\bar{l} \in \overline{\mathcal{T}}(\mathcal{V})$ un terme tel que $\mathsf{mmax}(\bar{l}) \leq k$, $v \in \mathsf{Topd}(\bar{t})$ une position dans le domaine utile, et $\overline{\sigma}$ une substitution. Les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. $\mathsf{Top}_k(\bar{t}) \in \overline{\mathcal{T}}(\mathcal{Q},\mathcal{V})^{\leq k}$,
2. *$\bar{t}[]_v$ et $\bar{t}/v$ sont bien marqués pour k et*

$$\mathsf{Top}_k(\bar{t}) = \mathsf{Top}_k(\bar{t})[\mathsf{Top}_k(\bar{t}/v))]_v,$$

3. *Si $\bar{t} = \bar{t}[\bar{l}\overline{\sigma}]_v$, alors*

$$\mathsf{Top}_k(\bar{t}) = \mathsf{Top}_k(\bar{t})[\bar{l}\mathsf{Top}_k(\overline{\sigma})]_v.$$

Démonstration. Nous omettons l'indice sur Top_k et notons Top ce qui devrait être noté Top_k.

1. C'est une simple conséquence de la définition de Top.
2. Comme $v \in \mathsf{Topd}(\bar{t})$, pour tout $u \prec v$, $\mathsf{m}(\bar{t}/u) \leq k$. Le terme $\bar{t}[]_v$ obtenu à partir de t en remplaçant le symbole à la position v par la variable □ est donc bien marqué pour k. Il est facile de vérifier que le terme $\bar{t}/v$ est lui aussi bien marqué pour k.
   Pour montrer que $\mathsf{Top}(\bar{t}) = \mathsf{Top}(\bar{t})[\mathsf{Top}(\bar{t}/v)]_v$, il suffit de montrer que

$$\mathsf{Top}(\bar{t}/v) = \mathsf{Top}(\bar{t})/v.$$

   Commençons par montrer que $\mathsf{Topd}(\bar{t}/v) = \mathcal{P}\mathsf{os}(\mathsf{Top}(\bar{t})/v)$.
   Nous avons (remarque 3.43 page 52)

$$\mathsf{Topd}(\bar{t}/v) = \{u \in \mathcal{P}\mathsf{os}(t/v) \mid \mathsf{m}(\bar{t}/v \cdot u) \leq k+1\},$$

   et

$$\begin{aligned}\mathcal{P}\mathsf{os}(\mathsf{Top}(\bar{t})/v) &= \{u \mid v \cdot u \in \mathsf{Topd}(\bar{t})\}\\ &= \{u \in \mathcal{P}\mathsf{os}(t/v) \mid \mathsf{m}(\bar{t}/v \cdot u) \leq k+1\}.\end{aligned}$$

Ces deux ensembles sont donc identiques.
De plus, pour toute position $u \in \mathsf{Topd}(\bar{t}/v)$, nous avons

$$\mathsf{root}(\mathsf{Top}(\bar{t}/v)/u) = \mathsf{root}(\mathsf{Top}(\bar{t}/v \cdot u)) = \mathsf{root}(\bar{t}/v \cdot u)$$

si $\mathsf{m}(v \cdot u) \leq k$, et

$$\mathsf{root}(\mathsf{Top}(\bar{t}/v)/u) = \mathsf{root}(\mathsf{Top}(\bar{t}/v \cdot u)) = \bar{t}/v \cdot u \downarrow_{\mathcal{A}^{\geq k+1}}$$

si $\mathsf{m}(\bar{t}/v \cdot u) = k+1$. Nous avons donc

$$\mathsf{Top}(\bar{t}) = \mathsf{Top}(\bar{t})[\mathsf{Top}(\bar{t}/v)]_v.$$

3. Soit $\bar{t} = \bar{t}[\bar{l}\bar{\sigma}]_v$. Comme $v \in \mathsf{Topd}(\bar{t})$, nous pouvons appliquer le point 2 de ce lemme, et nous obtenons

$$\mathsf{Top}(\bar{t}) = \mathsf{Top}(\bar{t})[\mathsf{Top}(\bar{l}\bar{\sigma})].$$

Comme $\mathsf{mmax}(\bar{l}) \leq k$, et comme $\bar{t}$ est bien marqué pour k, pour toute variable $x \in \mathcal{V}\mathsf{ar}(l)$,

$$\mathsf{pos}(l, x) \in \mathsf{Topd}(\bar{l}\bar{\sigma}).$$

Nous pouvons appliquer le point 2 à chacune des positions $\mathsf{pos}(l, x)$ et nous obtenons

$$\mathsf{Top}(\bar{l}\bar{\sigma}) = \mathsf{Top}(\bar{l})\mathsf{Top}(\bar{\sigma}).$$

Comme $\mathsf{mmax}(\bar{l}) \leq k$, $\mathsf{Top}(\bar{l}) = \bar{l}$ et

$$\mathsf{Top}(\bar{t}) = \mathsf{Top}(\bar{t})[\bar{l}\mathsf{Top}(\bar{\sigma})]_v.$$

□

3.7.3 De $\mathsf{bo}(k)$ à $\mathsf{bo}(0)$

Rappelons que pour le restant du chapitre, $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ désigne un système linéaire, et $\mathcal{A} = (\mathcal{F}, \mathcal{Q}, \mathcal{Q}_f, \Gamma)$ désigne un automate déterministe complet. Nous notons :

— $\boldsymbol{\mathcal{T}(\mathcal{Q}, \mathcal{V})}$ l'ensemble de termes $\mathcal{T}(\mathcal{F} \cup \mathcal{Q}, \mathcal{V})$, et $\boldsymbol{\mathcal{T}(\mathcal{Q})}$ l'ensemble $\mathcal{T}(\mathcal{F} \cup \mathcal{Q})$,
— $\boldsymbol{\overline{\mathcal{T}}(\mathcal{Q}, \mathcal{V})}$ l'ensemble de termes $\mathcal{T}(\mathcal{F}^{\mathbb{N}} \cup \mathcal{Q}, \mathcal{V})$, et $\boldsymbol{\overline{\mathcal{T}}(\mathcal{Q})}$ l'ensemble $\mathcal{T}(\mathcal{F}^{\mathbb{N}} \cup \mathcal{Q})$.

Dans cette section, nous montrons que les dérivations $\mathsf{bo}(k)$ peuvent être simulées par un système clos. Nous commençons en montrant qu'il suffit de savoir simuler les dérivations $\mathsf{bo}(0)$ pour pouvoir simuler les dérivations $\mathsf{bo}(k)$. La proposition suivante permet de montrer que l'étude de la stratégie $\mathsf{bo}(0)$ est suffisante pour obtenir les résultats annoncés. Ce n'est pas le cas pour la stratégie $\mathsf{bhbo}(k)$. Nous utiliserons le lemme de König. Soit

$$\begin{aligned}\mathcal{R}' := \{ & l\sigma \to r\sigma \mid l \to r \in \mathcal{R}, \sigma : \mathcal{V} \to \mathcal{T}(\mathcal{V}), dpt(\sigma) \leq k, \\ & \text{et } l\sigma \to r\sigma \text{ est linéaire}\}.\end{aligned}$$

Le système $\mathcal{R}'$ va nous servir à simuler les dérivation $\mathsf{bo}(k)$ dans $\mathcal{R}$ par des dérivation $\mathsf{bo}(0)$ dans $\mathcal{R}'$.

Proposition 3.48. *Soit $s \in \mathcal{T}$. Le système $\mathcal{R}'$ satisfait les propositions suivantes :*

1. $\forall n, \rightarrow^n_{\mathcal{R}} = \rightarrow^n_{\mathcal{R}'}$,
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ {}_{\mathsf{bo}(k)}\!\!\rightarrow^n_{\mathcal{R}} = {}_{\mathsf{bo}(0)}\!\!\rightarrow^n_{\mathcal{R}'}$,
3. *$\mathcal{R}$ $\mathsf{bo}(k)$-termine sur s si et seulement si $\mathcal{R}'$ $\mathsf{bo}(0)$-termine sur s,*
4. *$\mathcal{R}$ i-$\mathsf{bo}(k)$-termine sur s si et seulement si $\mathcal{R}'$ i-$\mathsf{bo}(0)$-termine sur s.*

Cette proposition, est une conséquence directe des lemmes suivants.

Lemme 3.49. *Soit $\overline{s}, \overline{t} \in \overline{\mathcal{T}}$ des termes bien marqués pour k et tels que $\overline{s}\ {}_{\mathsf{bo}(k)}\!\circ\!\!\rightarrow_{\mathcal{R},l\to r,v} \overline{t}$. Soit $\widetilde{s} \in \overline{\mathcal{T}}$ un terme bien marqué pour 0 et tel que pour tout $u \in \mathcal{P}\mathsf{os}(s)$,*

$$\mathsf{m}(\widetilde{s}/u) = 0 \Leftrightarrow \mathsf{m}(\overline{s}/u) \leq k.$$

Il existe un terme $\widetilde{t}$ bien marqué pour 0 et une substitution τ tels que :

- *pour tout $u \in \mathcal{P}\mathsf{os}(t)$, $\mathsf{m}(\widetilde{t}/u) = 0 \Leftrightarrow \mathsf{m}(\overline{t}/u) \leq k$,*
- *$\widetilde{s}\ {}_{\mathsf{bo}(0)}\!\circ\!\!\rightarrow_{\mathcal{R}',l\tau\to r\tau,v} \widetilde{t}$.*

Démonstration. Nous avons

$$\overline{s} = \overline{s}[\overline{l}\sigma]_v\ {}_{\mathsf{bo}(k)}\!\circ\!\!\rightarrow_{\mathcal{R},l\to r,v} \overline{t} = \overline{s}[r(\overline{\sigma} \odot 1)]_v.$$

Soit τ la substitution définie par

$$\forall x \in \mathcal{V}\mathsf{ar}(l), x\tau = x\sigma[y_{x_1}, \ldots, y_{x_n}]_{\mathcal{P}\mathsf{os}_{\mathcal{F}^{k+1}}(x\overline{\sigma}\odot 1)}.$$

(L'ensemble $\mathcal{P}\mathsf{os}_{\mathcal{F}^{k+1}}(x\overline{\sigma} \odot 1)$ est l'ensemble des positions de $x\overline{\sigma} \odot 1$ appartenant à $\mathcal{F}$ et marquées par $k+1$).
La règle $l\tau \to r\tau$ est bien linéaire. De plus, par définition de $\odot 1$, pour tout $u \in \mathcal{P}\mathsf{os}_{\setminus\mathcal{V}}(x\overline{\sigma} \odot 1)$, tel que $|u| \geq k$, $\mathsf{m}(x\overline{\sigma} \odot 1/u) \geq k+1$. On a donc, pour tout $u \in \mathcal{P}\mathsf{os}_{\setminus\mathcal{V}}(x\tau)$,

$$|u| \leq k - 1.$$

Il y a une dérivation

$$\widetilde{s}[(l\tau)\widetilde{\sigma'}]_v\ {}_{\mathsf{bo}(0)}\!\circ\!\!\rightarrow_{\mathcal{R}'} \widetilde{t} = \widetilde{s}[(r\tau)(\widetilde{\sigma'} \odot 1)]_v,$$

telle que pour tout $u \in \mathcal{P}\mathsf{os}(s)$,

$$\mathsf{m}(\widetilde{t}/u) = 0 \Leftrightarrow \mathsf{m}(\overline{t}/u) \leq k.$$

□

Lemme 3.50. *Soit $\overline{s}, \overline{t} \in \overline{\mathcal{T}}$ des termes bien marqués pour 0 et tels que $\overline{s}\ {}_{\mathsf{bo}(0)}\!\circ\!\!\rightarrow_{\mathcal{R}'} \overline{t}$. Soit $\widetilde{s} \in \overline{\mathcal{T}}$ un terme bien marqué pour k tel que pour tout $u \in \mathcal{P}\mathsf{os}(s)$,*

$$\mathsf{m}(\overline{s}/u) = 0 \Rightarrow \mathsf{m}(\widetilde{s}/u) \leq k.$$

Il existe un terme $\widetilde{t}$ bien marqué pour k tel que :

- *pour tout $u \in \mathcal{P}\mathsf{os}(t)$, $\mathsf{m}(\overline{t}/u) = 0 \Rightarrow \mathsf{m}(\widetilde{t}/u) \leq k$,*
- *$\widetilde{s}\ {}_{\mathsf{bo}(k)}\!\circ\!\!\rightarrow_{\mathcal{R}} \widetilde{t}$.*

Démonstration. Soit

$$\overline{s} = \overline{s}[(l\tau)\sigma]_v \ {}_{\mathsf{bo}(0)}\!\circ\!\!\to_{\mathcal{R}', l\tau \to r\tau} \overline{t} = \overline{s}[(r\tau)(\overline{\sigma} \odot 1)]_v.$$

Le terme $\widetilde{s}$ est de la forme

$$\widetilde{s} = \widetilde{s}[\widetilde{l}(\widetilde{\tau\sigma})]_v,$$

où $(\tau\sigma)$ est la substitution définie par $\forall x \in \mathcal{V}\mathsf{ar}(l)$

$$x(\tau\sigma) = (x\tau)\sigma.$$

Comme $\overline{s}$ est bien marqué pour 0, et comme le pas est $\mathsf{bo}(0)$, pour toute position $u \prec v$, $\mathsf{m}(\overline{s}/u) = 0$. On a donc pour tout position $u \prec v$, $\mathsf{m}(\widetilde{s}/u) \leq k$. De plus, comme l n'est pas marqué, $\mathsf{mmax}(\widetilde{l}) \leq k$. Il y a un pas

$$\widetilde{s}[\widetilde{l}(\widetilde{\tau\sigma})]_v \ {}_{\mathsf{bo}(k)}\!\circ\!\!\to_{\mathcal{R}} \widetilde{t} = \widetilde{s}[r(\widetilde{\tau\sigma} \odot 1)]_v.$$

qui est $\mathsf{bo}(k)$. Soit $u \in \mathcal{P}\mathsf{os}(t)$ tel que $\mathsf{m}(\overline{t}/u) = 0$. Montrons que $\mathsf{m}(\widetilde{t}/u) \leq k$. On distingue 3 cas.

— $\boldsymbol{u \prec v}$**, ou** $\boldsymbol{u \perp v}$**.**
Alors

$$\mathsf{m}(\overline{t}/u) = \mathsf{m}(\overline{s}/u), \text{ et } \mathsf{m}(\widetilde{t}/u) = \mathsf{m}(\widetilde{s}/u).$$

Le résultat est vérifié.

— $\boldsymbol{u \succeq v}$ **et il existe** $\boldsymbol{w \in \mathcal{P}\mathsf{os}_{\setminus\mathcal{V}}(r)}$ **tel que** $\boldsymbol{u = v \cdot w}$**.**
Dans ce cas,

$$\mathsf{m}(\widetilde{t}/u) = \mathsf{m}(r/w) = 0.$$

Le résultat est vérifié.

— $\boldsymbol{u \succeq v}$ **et** $\boldsymbol{\exists x \in \mathcal{V}\mathsf{ar}(r)}$**,** $\boldsymbol{w_1 \in \mathcal{P}\mathsf{os}(r, x)}$**,** $\boldsymbol{w_2 \in \mathcal{P}\mathsf{os}(x(\tau\sigma))}$ **tels que** $\boldsymbol{u = v \cdot w_1 \cdot w_2}$**.**
Comme $\mathsf{m}(\overline{t}/u) = 0$, nécessairement $w_2 \in \mathcal{P}\mathsf{os}_{\setminus\mathcal{V}}(x\tau)$. Par définition,

$$\mathsf{m}(\widetilde{t}/u) = \max(\mathsf{m}(x(\widetilde{\tau\sigma})/w_2), |w_2| + 1).$$

Comme $\mathsf{m}(x\tau/w_2) = 0$, $\mathsf{m}(x(\widetilde{\tau\sigma})/w_2) \leq k$. De plus, comme $dpt(\tau) \leq k$, $|w_2| \leq k - 1$. On obtient

$$\mathsf{m}(\widetilde{t}/u) \leq k.$$

□

Nous sommes maintenant prêts à démontrer la proposition 3.48 page 56.

Preuve de la proposition 3.48. Cette proposition est obtenue à partir des deux lemmes précédents.

1. $\boldsymbol{\forall n, \to^n_{\mathcal{R}} = \to^n_{\mathcal{R}'}}$**.**
   Conséquence directe de la définition de $\mathcal{R}'$.
2. $\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N},\ {}_{\mathsf{bo}(k)}\!\to^n_{\mathcal{R}} = {}_{\mathsf{bo}(0)}\!\to^n_{\mathcal{R}'}}$**.**
   S'il existe une dérivation

$$s \ {}_{\mathsf{bo}(k)}\!\circ\!\!\to^n_{\mathcal{R}} \overline{t},$$

alors comme s est bien marqué pour 0, nous pouvons appliquer n fois le lemme 3.49 pour obtenir une dérivation

$$s \ {}_{\mathsf{bo}(0)}\!\!\circ\!\!\longrightarrow^n_{\mathcal{R}'} \widetilde{t}.$$

Réciproquement, s'il existe une dérivation

$$s \ {}_{\mathsf{bo}(0)}\!\!\circ\!\!\longrightarrow^n_{\mathcal{R}'} \widetilde{t},$$

alors comme s est bien marqué pour 0, en appliquant n fois le lemme 3.50 on obtient une dérivation

$$s \ {}_{\mathsf{bo}(k)}\!\!\circ\!\!\longrightarrow^n_{\mathcal{R}} \overline{t}.$$

3. **$\mathcal{R}$ bo(k)-termine sur s si et seulement si $\mathcal{R}'$ bo(0)-termine sur s.**
Si $\mathcal{R}$ ne $\mathsf{bo}(k)$-termine pas sur s, alors il existe une suite infinie de termes $(\overline{s_i})_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $\overline{s_0} = s$, et pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\overline{s_i} \ {}_{\mathsf{bo}(k)}\!\!\circ\!\!\longrightarrow_{\mathcal{R}} \overline{s_{i+1}}.$$

Comme s est non marqué, le lemme 3.49 assure qu'il existe une suite infinie de termes $(\widetilde{s_i})_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $\widetilde{s_0} = s$, et pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\widetilde{s_i} \ {}_{\mathsf{bo}(0)}\!\!\circ\!\!\longrightarrow_{\mathcal{R}'} \widetilde{s_{i+1}},$$

et $\mathcal{R}'$ ne $\mathsf{bo}(0)$-termine pas sur s.
Réciproquement, si $\mathcal{R}'$ ne $\mathsf{bo}(0)$-termine pas sur s alors il existe une suite infinie de termes $(\widetilde{s_i})_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $\widetilde{s_0} = s$, et pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\widetilde{s_i} \ {}_{\mathsf{bo}(0)}\!\!\circ\!\!\longrightarrow_{\mathcal{R}'} \widetilde{s_{i+1}}.$$

Comme s est non marqué, le lemme 3.50 assure qu'il existe une suite infinie de termes $(\overline{s_i})_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $\overline{s_0} = s$, et pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\overline{s_i} \ {}_{\mathsf{bo}(k)}\!\!\circ\!\!\longrightarrow_{\mathcal{R}} \overline{s_{i+1}},$$

et $\mathcal{R}$ ne $\mathsf{bo}(k)$-termine pas sur s.

4. **$\mathcal{R}$ i-bo(k)-termine sur s si et seulement si $\mathcal{R}'$ i-bo(0)-termine sur s.**
Supposons que $\mathcal{R}$ ne i-$\mathsf{bo}(k)$-termine pas sur s. Alors, il existe une suite infinie de termes $(\overline{s_i})_{i\in\mathbb{N}}$ bien marqués pour k telle que $s_0 = s$ et pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\overline{s_{i+1}} \ {}_{\mathsf{bo}(k)}\!\!\circ\!\!\longrightarrow_{\mathcal{R}} \overline{s_i}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il y a une dérivation

$$\overline{\overline{d_n}} : s_n \ {}_{\mathsf{bo}(k)}\!\!\circ\!\!\longrightarrow_{\mathcal{R}} \overline{\overline{s_{n-1}}} \ {}_{\mathsf{bo}(k)}\!\!\circ\!\!\longrightarrow_{\mathcal{R}} \cdots \ {}_{\mathsf{bo}(k)}\!\!\circ\!\!\longrightarrow_{\mathcal{R}} \overline{\overline{s_0}}.$$

Il y a une double barre sur d_n car le marquage sur les termes $\overline{\overline{s_i}}$ n'est pas nécessairement identique au marquage sur les termes $\overline{s_i}$. D'après le lemme 3.49, pour chacune de ces dérivations, il y a une dérivation

$$\widetilde{d_n} : s_n \ {}_{\mathsf{bo}(0)}\!\!\circ\!\!\longrightarrow_{\mathcal{R}'} \widetilde{s_{n-1}} \ {}_{\mathsf{bo}(0)}\!\!\circ\!\!\longrightarrow_{\mathcal{R}'} \widetilde{s_0}.$$

Dans la dérivation $\widetilde{d_n}$, le terme s_0 n'est pas forcément marqué de la même manière que dans la dérivation $\widetilde{d_{n+1}}$. Par contre, dans toutes les dérivations $\widetilde{d_n}$, le version marquée de s_0 est toujours bien marqué pour 0. Or il n'y a qu'un nombre fini de versions bien marquées de s_0. Il y a une infinité de dérivations $\widetilde{d_n}$ qui aboutissent sur une même version marquée de s_0 (lemme de König). En recommençant ce raisonnement en considérant s_1 et les dérivations qui aboutissent sur s_0, on obtient une infinité de dérivations marquées qui aboutissent sur une même version marquée de s_1, puis vers une même version marquée de s_0 (à nouveau grâce au lemme de König). En réitérant ce raisonnement à l'infini, on obtient une suite infinie de termes $(\widetilde{s_i})_{i\in\mathbb{N}}$ bien marqués pour 0 et tels que $s_0 = s$ et pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\widetilde{s_{i+1}} \ {}_{\mathsf{bo}(0)}{\circ\!\!\longrightarrow}_{\mathcal{R}'} \widetilde{s_i}.$$

Le système $\mathcal{R}'$ ne i-$\mathsf{bo}(0)$-termine pas sur s.
Comme pour les deux points qui précédent, la réciproque se démontre de la même manière, mais en utilisant le lemme 3.50.

□

3.7.4 Le système clos $\mathcal{S}$

Nous pouvons maintenant définir le système clos $\mathcal{S}$ qui va nous permettre de simuler les dérivations $\mathsf{bo}(0)$.

Définition 3.51 (Le système clos $\mathcal{S}$ pour $\mathsf{bo}(0)$)**.** *Le système $(\mathcal{F} \cup \mathcal{Q}, \mathcal{S})$ est le systèmes clos constitué de l'ensemble des règles*

$$\mathcal{S} := \{l\tau \to r\tau \mid l \to r \in \mathcal{R}, \tau : \mathcal{V} \to \mathcal{Q}\}. \tag{3.8}$$

3.7.5 Lemme de projection pour $\mathsf{bo}(0)$

Voici le lemme de projection pour la stratégie $\mathsf{bo}(0)$. Ce lemme est illustré sur la figure 16.

Lemme 3.52 (Lemme de projection pour $\mathsf{bo}(0)$)**.** *Soit $\overline{s} \in \overline{\mathcal{T}}$ un terme bien marqué pour* 0*, et*

$$\overline{s} \ {}_{\mathsf{bo}(0)}{\circ\!\!\longrightarrow}_{\mathcal{R}} \overline{t}$$

un pas de réécriture marqué $\mathsf{bo}(0)$*. Il existe une dérivation*

$$\mathsf{Top}_0(\overline{s}) \to^*_{\mathcal{A}} \to_{\mathcal{S}} \mathsf{Top}_0(\overline{t}).$$

Démonstration. Soit $\overline{s} \in \overline{\mathcal{T}}$ un terme bien marqué pour 0 et

$$\overline{s} = \overline{s}[\overline{l}\overline{\sigma}]_v \ {}_{\mathsf{bo}(0)}{\circ\!\!\longrightarrow}_{\mathcal{R},l\to r,v} \overline{t} = \overline{s}[r(\overline{\sigma} \odot 1)]_v.$$

Comme le pas est $\mathsf{bo}(0)$, $\overline{l} = l$. Montrons d'abord que

$$\mathsf{Top}_0(\overline{s}) = \mathsf{Top}_0(\overline{s})[l\mathsf{Top}_0(\overline{\sigma})]_v,$$

et

$$\mathsf{Top}_0(\overline{t}) = \mathsf{Top}_0(\overline{s})[r(\mathsf{Top}_0(\overline{\sigma} \odot 1))].$$

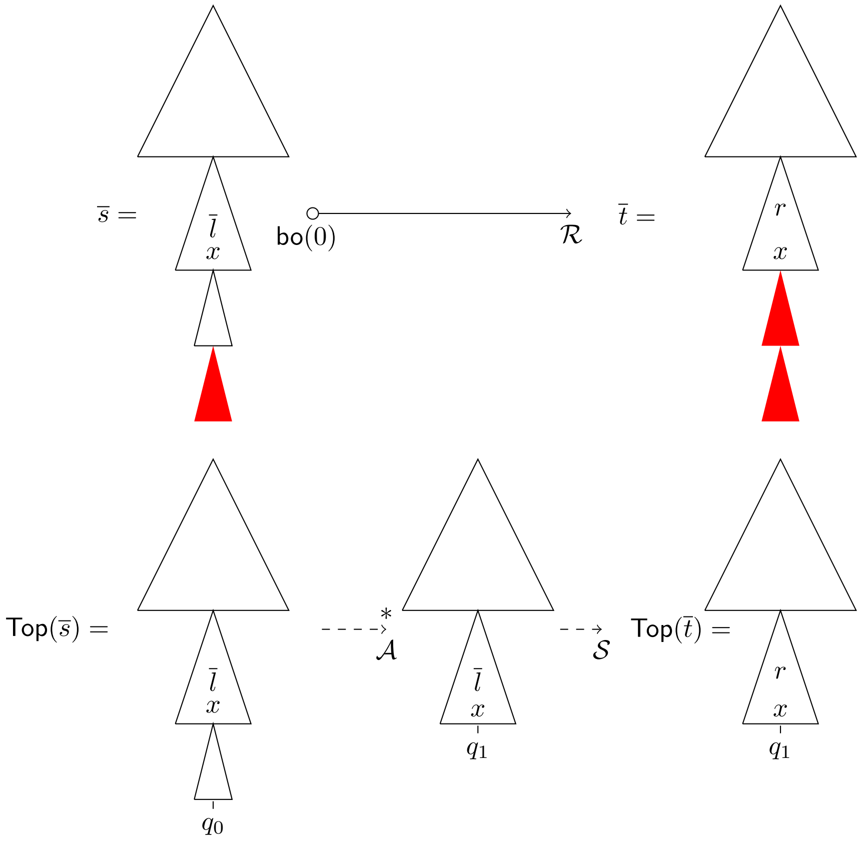

FIGURE 16 – Projection d' un pas pour $\mathsf{bo}(0)$
(en rouge les parties inutiles).

Comme le pas de réécriture est $\mathsf{bo}(0)$, et comme $\overline{s}$ est bien marqué pour 0, il n'y a que des 0 au-dessus de la position où est appliquée la règle

$$\forall u \prec v, \mathsf{m}(\overline{s}/u) = 0.$$

Ainsi, $v \in \mathsf{Topd}_0(\overline{s})$, et d'après le lemme 3.47 page 54,

$$\mathsf{Top}_0(\overline{s}) = \mathsf{Top}_0(\overline{s})[l\mathsf{Top}_0(\overline{\sigma})]_v,$$

D'après la proposition 3.17 page 39, $\overline{t}$ est bien marqué pour 0. De plus, pour tout $u \prec v$,

$$\mathsf{m}(\overline{t}/u) = \mathsf{m}(\overline{s}/u) = 0,$$

et $v \in \mathsf{Topd}_0(\overline{t})$. On applique le lemme 3.47 et on obtient

$$\mathsf{Top}_0(\overline{t}) = \mathsf{Top}_0(\overline{s})[r(\mathsf{Top}_0(\overline{\sigma} \odot 1))].$$

Soit $x \in \mathcal{V}\mathsf{ar}(r)$. Montrons que $\mathsf{Topd}_0(x\overline{\sigma} \odot 1) = x\sigma \downarrow_{\mathcal{A}}$. Par définition de $\odot$ (définition 2.6 page 16), $\mathsf{m}(x\overline{\sigma} \odot 1) \geq 1$. D'après le lemme 3.47 appliqué à $\overline{t}$, $x\overline{\sigma} \odot 1$ est bien marqué pour 0. Ainsi,

$$\mathsf{m}(x\overline{\sigma} \odot 1) = 1,$$

et pour toute position $u \in \mathcal{P}\mathsf{os}^{\succ\epsilon}(x\overline{\sigma})$,

$$\mathsf{m}(x\overline{\sigma} \odot 1) \geq 2.$$

L'ensemble $\mathsf{Topd}_0(x\overline{\sigma} \odot 1)$ ne contient donc que ϵ. Par définition,

$$\mathsf{Top}_0(x\overline{\sigma}) = \mathsf{Red}_{\mathcal{A}^{\geq 1}}(x\overline{\sigma} \odot 1, \{\epsilon\}) = x\overline{\sigma} \odot 1 \downarrow_{\mathcal{A}^{\geq 1}} .$$

Par définition de l'automate $\mathcal{A}^{\geq 1}$,

$$x\overline{\sigma} \odot 1 \downarrow_{\mathcal{A}^{\geq 1}} = x\sigma \downarrow_{\mathcal{A}},$$

et

$$\mathsf{Top}_0(x\overline{\sigma} \odot 1) = x\sigma \downarrow_{\mathcal{A}} .$$

Soit $\tau : \mathcal{V} \to \mathcal{Q}$ la substitution définie par

$$\forall x \in \mathcal{V}\mathsf{ar}(l), x\tau = x\sigma \downarrow_{\mathcal{A}} .$$

Soit $x \in \mathcal{V}\mathsf{ar}(l)$. Par définition,

$$x\overline{\sigma} \to^*_{\mathcal{A}^{\geq 1}} \mathsf{Top}_0(x\overline{\sigma}).$$

Comme $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ est confluent,

$$\mathsf{Top}_0(x\overline{\sigma}) \to^*_{\mathcal{A}^{\mathbb{N}}} x\tau = x\overline{\sigma} \downarrow_{\mathcal{A}^{\mathbb{N}}} .$$

D'après le lemme 3.47,

$$\mathsf{Top}_0(x\overline{\sigma}) \in \mathcal{T}(\mathcal{Q}),$$

et on a

$$\mathsf{Top}_0(x\overline{\sigma}) \to^*_{\mathcal{A}} x\overline{\tau}.$$

La règle $l\tau \to r\tau$ est dans $\mathcal{S}$ puisque $\tau : \mathcal{V} \to \mathcal{Q}$. Il y a une dérivation

$$\mathsf{Top}_0(\overline{s}) = \mathsf{Top}_0(\overline{s})[l\mathsf{Top}_0(\overline{\sigma})]_v \to^*_{\mathcal{A}} \mathsf{Top}_0(\overline{s})[l\tau]_v \to_{\mathcal{S}} \mathsf{Top}_0(\overline{s})[r\tau]_v = \mathsf{Top}_0(\overline{t}).$$

$\square$

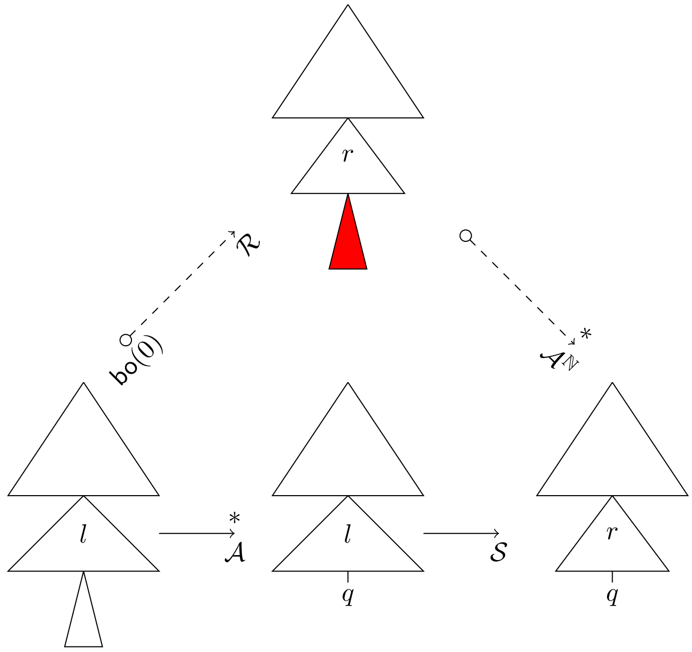

FIGURE 17 – Relèvement d'un pas
(en rouge les marques sont > 0).

Exemple 3.53. *Pour simplifier, on considère $\mathcal{A}$ l'automate déterministe complet qui a un seul état q. On peut facilement le remplacer par l'automate déterministe complet de son choix. Soit $\mathcal{R}_0 = \{\mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) \to \mathsf{f}(x)\}$. Pour $\mathcal{A}$ et $\mathcal{R}_0$ le système $\mathcal{S}$ contient une seule règle $\mathcal{S} = \{\mathsf{f}(\mathsf{f}(q)) \to \mathsf{f}(q)\}$. Il y a un pas* $\mathsf{bo}(0)$

$$\mathsf{i}(\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{i}^1(\mathsf{a}^1)))) \;{}_{\mathsf{bo}(0)}{\circ\!\!\rightarrow_0}\; \mathsf{i}(\mathsf{f}(\mathsf{i}^1(\mathsf{a}^2))).$$

Par définition,

$$\mathsf{Top}_0(\mathsf{i}(\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{i}^1(\mathsf{a}^1))))) = \mathsf{i}(\mathsf{f}(\mathsf{f}(q))),\;\; \mathsf{Top}_0(\mathsf{i}(\mathsf{f}(\mathsf{i}^1(\mathsf{a}^2)))) = \mathsf{i}(\mathsf{f}(q))$$

et on obtient bien la dérivation voulue

$$\mathsf{i}(\mathsf{f}(\mathsf{f}(q))) \to_{\mathcal{S},0} \mathsf{i}(\mathsf{f}(q)).$$

3.7.6 Lemme de relèvement pour bo(0)

Voici le lemme de relèvement pour la stratégie $\mathsf{bo}(0)$. Il est représenté sur la figure 17.

Lemme 3.54 (Lemme de relèvement pour $\mathsf{bo}(0)$)**.** *Soient $\overline{s'} \in \overline{\mathcal{T}}, \overline{s}, \overline{t} \in \mathcal{T}(\mathcal{F} \cup \mathcal{Q})$ tels que*

$$\overline{s'} \to^*_{\mathcal{A}^{\mathbb{N}}} \overline{s} \to_{\mathcal{S}} \overline{t}.$$

Il existe un terme $\overline{t'} \in \overline{\mathcal{T}}$ tel que :

$$\overline{s'} \;{}_{\mathsf{bo}(0)}{\circ\!\!\rightarrow_{\mathcal{R}}}\; \overline{t'} \to^*_{\mathcal{A}^{\mathbb{N}}} \overline{t}.$$

Démonstration. Soient $\overline{s'} \in \overline{\mathcal{T}}, \overline{s}, \overline{t} \in \mathcal{T}(\mathcal{F} \cup \mathcal{Q})$ tels que

$$\overline{s'} \rightarrow^*_{\mathcal{A}^{\mathbb{N}}} \overline{s} \rightarrow_{\mathcal{S}} \overline{t}.$$

Par définition, il existe $\tau : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{Q}$ et $l \rightarrow r \in \mathcal{R}$ tels que

$$\overline{s} = \overline{s}[l\tau]_v \text{ et } \overline{t} = \overline{s}[r\tau].$$

Comme $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ est un automate, il existe une substitution $\overline{\sigma} : \mathcal{V} \rightarrow \overline{\mathcal{T}}$ telle que

$$\overline{s'} = \overline{s'}[l\overline{\sigma}]_v,$$

$$\overline{s'}[]_v \rightarrow^*_{\mathcal{A}^{\mathbb{N}}} \overline{s}[]_v,$$

et pour tout $x \in \mathcal{V}\mathsf{ar}(l)$,

$$x\overline{\sigma} \rightarrow^*_{\mathcal{A}^{\mathbb{N}}} x\tau$$

D'autre part, il y a une dérivation

$$\overline{s'} = \overline{s'}[l\overline{\sigma}]_v \ {}_{\mathsf{bo}(0)}{\circ\!\!\rightarrow}_{\mathcal{R}} \ \overline{s'}[r(\overline{\sigma} \odot 1)]_v.$$

Comme pour tout $x \in \mathcal{V}\mathsf{ar}(r)$, $x\overline{\sigma} \rightarrow^*_{\mathcal{A}^{\mathbb{N}}} x\tau$,

$$x\overline{\sigma} \odot 1 \rightarrow^*_{\mathcal{A}^{\mathbb{N}}} x\tau = x\sigma \downarrow_{\mathcal{A}},$$

et

$$r(\overline{\sigma} \odot 1) \rightarrow^*_{\mathcal{A}^{\mathbb{N}}} r\tau.$$

Il y a donc une dérivation :

$$\overline{s'} = \overline{s'}[l\overline{\sigma}]_v \ {}_{\mathsf{bo}(0)}{\circ\!\!\rightarrow}^*_{\mathcal{A}^{\mathbb{N}}} \ \overline{s'}[r(\overline{\sigma} \odot 1)]_v \rightarrow^*_{\mathcal{A}^{\mathbb{N}}} \overline{s}[r(\overline{\sigma} \odot 1)]_v \rightarrow^*_{\mathcal{A}^{\mathbb{N}}} \overline{t} = \overline{s}[r\overline{\tau}]_v.$$

□

Exemple 3.55. *Reprenons le système* $\mathcal{R}_0 = \{\mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) \rightarrow \mathsf{f}(x)\}$ *et l'automate complet déterministe qui a un seul état* q *comme dans l'exemple 3.53. Nous avons* $\mathcal{S} = \{\mathsf{f}(\mathsf{f}(q)) \rightarrow \mathsf{f}(q)\}$ *et la dérivation suivante*

$$\mathsf{i}(\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{i}^1(\mathsf{a}^1)))) \rightarrow_{\mathcal{A}^{\mathbb{N}}} \mathsf{i}(\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{i}^1(q)))) \rightarrow_{\mathcal{A}^{\mathbb{N}}} \mathsf{i}(\mathsf{f}(\mathsf{f}(q))) \rightarrow_{\mathcal{S},0} \mathsf{i}(\mathsf{f}(q)).$$

Dans la preuve du lemme de relèvement 3.54 on applique d'abord la règle de $\mathcal{R}_0$ *correspondante pour obtenir un pas* $\mathsf{bo}(0)$

$$\mathsf{i}(\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{i}^1(\mathsf{a}^1)))) \ {}_{\mathsf{bo}(0)}{\circ\!\!\rightarrow}_0 \ \mathsf{i}(\mathsf{f}(\mathsf{i}^1(\mathsf{a}^2))).$$

Il faut ensuite réduire les parties inutiles à l'aide de $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ *pour obtenir la dérivation voulue*

$$\mathsf{i}(\mathsf{f}(\mathsf{i}^1(\mathsf{a}^2))) \rightarrow_{\mathcal{A}^{\mathbb{N}}} \mathsf{i}(\mathsf{f}(\mathsf{i}^1(q))) \rightarrow_{\mathcal{A}^{\mathbb{N}}} \mathsf{i}(\mathsf{f}(q)).$$

3.7.7 La simulation pour $\mathsf{bo}(k)$

Nous pouvons maintenant démontrer la proposition suivante à l'aide des lemmes de relèvement et de projection, et de la proposition 3.48 page 56.

Proposition 3.56 (Simulation pour $\mathsf{bo}(k)$)**.** *Il existe un système clos $\mathcal{S}$ tel que, pour tout $q \in \mathcal{Q}$, $n \in \mathbb{N}$ et tout $s \in \mathcal{T}$,*

$$s \;{}_{\mathsf{bo}(k)}\!\!\rightarrow^n_{\mathcal{R}} \;\rightarrow^*_{\mathcal{A}} q$$

$$\Leftrightarrow$$

il existe une dérivation $s \rightarrow^*_{\mathcal{S}\cup\mathcal{A}} q$ où n pas sont effectués dans $\mathcal{S}$.

Démonstration. Soit

$$\mathcal{R}' := \{l\sigma \to r\sigma \mid l \to r \in \mathcal{R}, \sigma : \mathcal{V} \to \mathcal{T}(\mathcal{V}), dpt(\sigma) \leq k, \text{et } l\sigma \to r\sigma \text{ est linéaire}\}.$$

D'après les points 1 et 2 du lemme 3.48 page 56,

$$\rightarrow^n_{\mathcal{R}} = \rightarrow^n_{\mathcal{R}'} \quad \text{et} \quad {}_{\mathsf{bo}(0)}\!\!\rightarrow^n_{\mathcal{R}'} = {}_{\mathsf{bo}(k)}\!\!\rightarrow^n_{\mathcal{R}} .$$

Soit $\mathcal{S}$ le système de la définition 3.51 page 59 construit pour le système $\mathcal{R}'$.
$\Rightarrow$) : Cette partie de la preuve est représentée sur la figure 18 et est obtenue en appliquant n fois le lemme de projection 3.52. Soient $s, t \in \mathcal{T}, q \in \mathcal{Q}$ tels que

$$s \;{}_{\mathsf{bo}(k)}\!\!\rightarrow^n_{\mathcal{R}} t \rightarrow^*_{\mathcal{A}} q.$$

On a

$$s \;{}_{\mathsf{bo}(0)}\!\!\rightarrow^n_{\mathcal{R}'} t \rightarrow^*_{\mathcal{A}} q.$$

Par définition d'une dérivation $\mathsf{bo}(0)$, il existe $\overline{s_1}, \ldots, \overline{s_n}$ tels que

$$s \;{}_{\mathsf{bo}(0)}\!\!\circ\!\!\rightarrow_{\mathcal{R}'} \overline{s_1} \;{}_{\mathsf{bo}(0)}\!\!\circ\!\!\rightarrow_{\mathcal{R}'} \overline{s_2} \ldots \;{}_{\mathsf{bo}(0)}\!\!\circ\!\!\rightarrow_{\mathcal{R}'} \overline{s_n} = \overline{t}.$$

En utilisant le lemme 3.52 page 59 on obtient une dérivation :

$$\mathsf{Top}_0(s) \rightarrow^*_{\mathcal{A}}\rightarrow_{\mathcal{S}} \mathsf{Top}_0(\overline{s_1}) \rightarrow^*_{\mathcal{A}}\rightarrow_{\mathcal{S}} \ldots \rightarrow^*_{\mathcal{A}}\rightarrow_{\mathcal{S}} \mathsf{Top}_0(\overline{s_n})$$

avec n pas effectués dans $\mathcal{S}$. Comme $s \in \mathcal{T}$, $\mathsf{Top}_0(s) = s$. D'autre part, comme $\overline{t} \downarrow_{\mathcal{A}^{\mathbb{N}}} = q$ et comme $\overline{t} \rightarrow^*_{\mathcal{A}^{\mathbb{N}}} \mathsf{Top}_0(\overline{t})$,

$$\mathsf{Top}_0(\overline{t}) \rightarrow^*_{\mathcal{A}^{\mathbb{N}}} q.$$

D'après le lemme 3.47, $\mathsf{mmax}(\mathsf{Top}_0(\overline{t})) = 0$ (le terme $\mathsf{Top}_0(\overline{t})$ n'est pas marqué), et

$$\mathsf{Top}_0(\overline{t}) \rightarrow^*_{\mathcal{A}} q.$$

Il y a une dérivation

$$s \rightarrow^*_{\mathcal{A}}\rightarrow_{\mathcal{S}} \mathsf{Top}_0(\overline{s_1}) \rightarrow^*_{\mathcal{A}}\rightarrow_{\mathcal{S}} \ldots \rightarrow^*_{\mathcal{A}}\rightarrow_{\mathcal{S}} \mathsf{Top}_0(\overline{s_n}) \rightarrow^*_{\mathcal{A}} q.$$

$\Leftarrow$) : Cette partie de la preuve est représentée sur la figure 19 page 66 et est obtenue en appliquant n fois le lemme de relèvement 3.54. Soit $s \in \mathcal{T}, q \in \mathcal{Q}$ tels qu'il existe une dérivation

$$s \rightarrow^*_{\mathcal{A}}\rightarrow_{\mathcal{S}} s_1 \rightarrow^*_{\mathcal{A}}\rightarrow_{\mathcal{S}} s_2 \ldots \rightarrow^*_{\mathcal{A}}\rightarrow_{\mathcal{S}} s_n \rightarrow^*_{\mathcal{A}} q$$

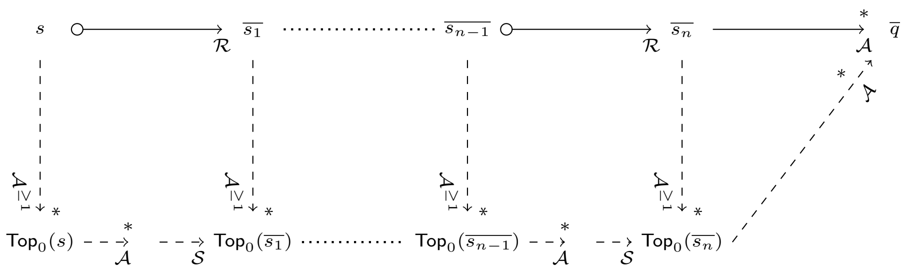

Figure 18 – Projection de n pas $\mathsf{bo}(0)$.

avec n pas effectués dans $\mathcal{S}$. En utilisant le lemme 3.52 page 59 sur $s \to_{\mathcal{A}}^{*} \to_{\mathcal{S}} s_1$, on montre qu'il existe un terme $\overline{s_1'}$ tel que :

$$s \ {}_{\mathsf{bo}(0)}{\to}_{\mathcal{R}'} \ \overline{s_1'} \to_{\mathcal{A}^{\mathbb{N}}}^{*} s_1.$$

Appliquons à nouveau ce même lemme sur la dérivation

$$\overline{s_1'} \to_{\mathcal{A}^{\mathbb{N}}}^{*} s_1 \to_{\mathcal{A}} \to_{\mathcal{S}} s_2.$$

Il existe un terme $\overline{s_2'}$ tel que :

$$s \ {}_{\mathsf{bo}(0)}{\circ\!\!\to}_{\mathcal{R}'} \ \overline{s_1'} \ {}_{\mathsf{bo}(0)}{\circ\!\!\to}_{\mathcal{R}'} \ \overline{s_2'} \to_{\mathcal{A}^{\mathbb{N}}}^{*} s_2.$$

En réitérant ce procédé, on obtient une dérivation

$$s \ {}_{\mathsf{bo}(0)}{\circ\!\!\to}_{\mathcal{R}'} \ \overline{s_1'} \ {}_{\mathsf{bo}(0)}{\circ\!\!\to}_{\mathcal{R}'} \cdots \ {}_{\mathsf{bo}(0)}{\circ\!\!\to}_{\mathcal{R}'} \ \overline{s_n'} \to_{\mathcal{A}^{\mathbb{N}}}^{*} s_n \to_{\mathcal{A}}^{*} q.$$

Il y a donc une dérivation :

$$s \ {}_{\mathsf{bo}(k)}{\circ\!\!\to}_{\mathcal{R}}^{n} \ \overline{s_n'} \to_{\mathcal{A}^{\mathbb{N}}}^{*} q.$$

□

3.8 Inverse-préservation de la reconnaissabilité pour la stratégie k-bornée

Le résultat d'i-préservation de la reconnaissabilité est obtenu grâce à la simulation et au résultat suivant sur les systèmes clos :

Théorème 3.57 (Inverse-préservation de la reconnaissabilité pour les systèmes clos [13])**.** *Soit $(\mathcal{F}, \mathcal{S})$ un système clos. Pour tout ensemble reconnaissable $T \in \mathsf{Rec}(\mathcal{F})$, l'ensemble $(\to_{\mathcal{S}}^{*})[T]$ est reconnaissable et peut être construit.*

Bien entendu, le système $\mathcal{S}^{-1}$ étant aussi clos, $\mathcal{S}$ préserve aussi la reconnaissabilité.

Théorème 3.58 (Inverse-préservation de la reconnaissabilité pour la stratégie $\mathsf{bo}(k)$)**.** *Pour tout ensemble reconnaissable $T \in \mathsf{Rec}(\mathcal{F})$, l'ensemble $({}_{\mathsf{bo}(k)}{\to}_{\mathcal{R}}^{*})[T]$ est reconnaissable et peut être construit.*

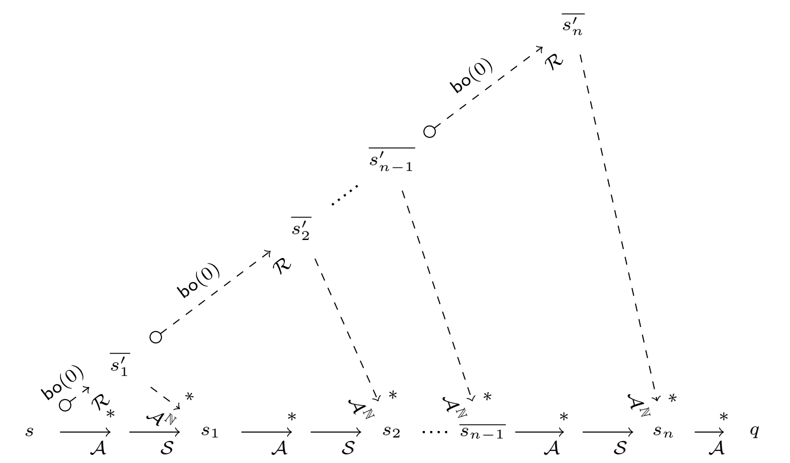

FIGURE 19 – Relèvement de n pas.

Démonstration. Soit $\mathcal{A} = (\mathcal{F}, \mathcal{Q}, \mathcal{Q}_f, \Gamma)$ un automate déterministe complet qui reconnaît le langage T. Nous construisons le système $\mathcal{S}$ de la proposition 3.56 page 64. Pour tout $q \in \mathcal{Q}$, et pour tout $s \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$,

$$s \;{}_{\mathsf{bo}(k)}{\to}^n_{\mathcal{R}} \;\to^*_{\mathcal{A}} q$$
$$\Leftrightarrow$$
il existe une dérivation $s \to^*_{\mathcal{S}\cup\mathcal{A}} q$ où n pas sont effectués dans $\mathcal{S}$.

Cela implique que
$$({}_{\mathsf{bo}(k)}{\to}^*_{\mathcal{R}})[T] = (\to^*_{\mathcal{S}\cup\mathcal{A}})[\mathcal{Q}_f].$$
Le système $\mathcal{S} \cup \mathcal{A}$ étant clos, le théorème 3.57 page 65 permet de conclure. □

En corollaire, nous démontrons que tout système $\mathsf{LBO}(k)$ i-préserve la reconnaissabilité.

Corollaire 3.59 (Inverse-préservation de la reconnaissabilité pour les systèmes $\mathsf{LBO}(k)$)**.** *Soit $\mathcal{R} \in \mathsf{LBO}(k)$. Soit $T \in \mathsf{Rec}(\mathcal{F})$. L'ensemble $(\to^*_{\mathcal{R}})[T]$ est reconnaissable et peut être construit.*

Démonstration. Le système $\mathcal{R}$ appartient à $\mathsf{LBO}(k)$. Par définition,

$$\to^*_{\mathcal{R}} = {}_{\mathsf{bo}(k)}{\to}_{\mathcal{R}} \text{ et } ({}_{\mathsf{bo}(k)}{\to}^*_{\mathcal{R}})[T] = (\to^*_{\mathcal{R}})[T].$$

Le théorème 3.58 permet de conclure. □

3.9 Décidabilité des problèmes de terminaison

Dans ce chapitre, nous démontrons que les différents problèmes de terminaison pour la stratégie $\mathsf{bo}(k)$ sont décidables. Nous verrons que l'on peut déduire de ce résultat la décidabilité des problèmes de terminaison pour les systèmes fortement bornés. Nous utiliserons le lemme de König dans certaines de nos preuves.

3.9.1 Décidabilité de la terminaison et de la terminaison uniforme pour la stratégie $\mathsf{bo}(k)$

Nous considérons un système linéaire $\mathcal{R}$ et un automate déterministe complet quelconque $\mathcal{A}$, et $\mathcal{S}$ le système de la définition 3.51 page 59 fabriqué pour $\mathcal{R}$ et $\mathcal{A}$. Les résultats de décidabilité pour les problèmes de terminaison et d'i-terminaison sont obtenus essentiellement grâce à la simulation et au théorème suivant.

Théorème 3.60 (Décidabilité de la terminaison pour les systèmes clos)**.** *Les problèmes de terminaison et de u-terminaison sont décidables pour les systèmes clos.*

Théorème 3.61. *Les problèmes de la* $\mathsf{bo}(k)$*-terminaison et de la u-*$\mathsf{bo}(k)$*-terminaison décidables.*

Démonstration. D'après le point 3 de la proposition 3.48 page 56, il suffit de montrer que les problèmes de $\mathsf{bo}(0)$-terminaison et de u-$\mathsf{bo}(0)$-terminaison sont décidables. Soit $s \in \mathcal{T}$. Montrons que

$$\mathcal{R}\ \mathsf{bo}(0)\text{-termine sur } s \Leftrightarrow \mathcal{S} \cup \mathcal{A} \text{ termine sur } s.$$

Supposons que $\mathcal{R}$ ne $\mathsf{bo}(0)$-termine pas sur s. Cela signifie qu'il existe une suite infinie de termes $(\overline{s_i})_{i \in \mathbb{N}}$ telle que $\overline{s_0} = s$ et pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\overline{s_i}\ {}_{\mathsf{bo}(0)}\!\circ\!\!\longrightarrow_{\mathcal{R}} \overline{s_{i+1}}$$

D'après le lemme de projection 3.52 page 59, pour tout $i \in \mathbb{N}$, il existe une dérivation

$$\mathsf{Top}_0(\overline{s_i}) \to_{\mathcal{A}}^{*}\to_{\mathcal{S}} \mathsf{Top}_0(\overline{s_{i+1}}).$$

Comme $\overline{s_0} = s \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$, $\mathsf{Top}_0(\overline{s_0}) = s$, et $\mathcal{S} \cup \mathcal{A}$ ne termine pas sur s.
Réciproquement, supposons que $\mathcal{S} \cup \mathcal{A}$ ne termine pas sur s. Comme $(\mathcal{F}, \Gamma)$ termine uniformément, cela signifie qu'il existe une dérivation

$$s_0 = s \to_{\mathcal{A}}^{*}\to_{\mathcal{S}} s_1 \to_{\mathcal{A}}^{*}\to_{\mathcal{S}} s_2 \ldots \to_{\mathcal{A}}^{*}\to_{\mathcal{S}} s_n \to_{\mathcal{A}}^{*}\to_{\mathcal{S}} \ldots.$$

D'après le lemme de relèvement 3.54 page 62 appliqué à $s_0 \to_{\mathcal{A}}^{*}\to_{\mathcal{S}} s_1$, il existe un terme $\overline{s'_1}$ tel que

$$\overline{s_0} = s\ {}_{\mathsf{bo}(0)}\!\circ\!\!\longrightarrow_{\mathcal{R}} \overline{s'_1} \to_{\mathcal{A}^{\mathbb{N}}}^{*} s_1.$$

En appliquant à nouveau ce lemme à

$$\overline{s'_1} \to_{\mathcal{A}}^{*} s_1 \to_{\mathcal{S}} s_2$$

on obtient un terme $\overline{s'_2}$ tel que

$$\overline{s'_1}\ {}_{\mathsf{bo}(0)}\!\!\longrightarrow_{\mathcal{R}}^{*} \overline{s'_2} \to_{\mathcal{A}^{\mathbb{N}}}^{*} s_2.$$

Il suffit de réitérer ce procédé pour obtenir une suite infinie $(\overline{s'_i})_{i \in \mathbb{N}}$ telle que $\overline{s'_0} = s$ et pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\overline{s'_i}\ {}_{\mathsf{bo}(0)}\!\circ\!\!\longrightarrow_{\mathcal{R}} \overline{s'_{i+1}}.$$

Cela signifie que $\mathcal{R}$ ne $\mathsf{bo}(0)$-termine pas sur s. Nous avons montré que pour tout s, $\mathcal{R}$ $\mathsf{bo}(0)$-termine sur s si et seulement si le système clos $\mathcal{S} \cup \mathcal{A}$ termine sur s. Le lemme 3.60 page 67 permet de conclure. $\square$

Nous allons maintenant montrer que les problème de terminaison et d'u-terminaison sont décidables pour la classe $\mathsf{LFBO}(k)$ en montrant qu'ils sont équivalents aux problèmes de terminaison associés pour la stratégie $\mathsf{bo}(k)$. Nous utilisons le lemme suivant pour démontrer ces équivalences.

Lemme 3.62. *Soient $s \in \mathcal{T}$ et $k \in \mathbb{N}$. Nous avons l'équivalence suivante*

$$\begin{gathered}\mathcal{R} \textit{ ne } \mathsf{bo}(k)\textit{-termine pas sur } s \\ \Leftrightarrow \\ \textit{il existe des dérivations } \mathsf{bo}(k) \\ \textit{de longueur arbitrairement grande qui partent de } s.\end{gathered}$$

Démonstration. Rappelons que le système $\mathcal{R}$ vérifie $\mathcal{V}\mathsf{ar}(r) \subseteq \mathcal{V}\mathsf{ar}(l)$. Si $\mathsf{LHS}(\mathcal{R}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$, alors nous pouvons pour tout terme s construire des dérivations $\mathsf{bo}(0)$ de longueur arbitrairement grande qui partent de s en utilisant uniquement une règle

$$l \to r \in \mathcal{R} \text{ où } l \in \mathcal{V}.$$

Soit $\mathcal{R}$ tel que $\mathsf{LHS}(\mathcal{R}) \cap \mathcal{V} = \emptyset$. Clairement, si $\mathcal{R}$ ne $\mathsf{bo}(k)$-termine pas sur s, alors il existe des dérivations $\mathsf{bo}(k)$ de longueur arbitrairement grande qui partent de s. Réciproquement, supposons qu'il existe des dérivations $\mathsf{bo}(k)$ de longueur arbitrairement grande qui partent de s. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe une dérivation $\mathsf{bo}(k)$ de longueur n qui commence par s

$$\begin{aligned}\overline{d_n} : \overline{s_{n,0}} = s \;_{\mathsf{bo}(k)}{\circ\!\!\longrightarrow}_{\mathcal{R}} \overline{s_{n,1}} \\ \cdots \;_{\mathsf{bo}(k)}{\circ\!\!\longrightarrow}_{\mathcal{R}} \overline{s_{n,n}}.\end{aligned}$$

Comme $\mathsf{LHS}(\mathcal{R}) \cap \mathcal{V} = \emptyset$, il n'y a qu'un nombre fini de pas de réécriture marquée partant de s, et au moins un parmi ces ensembles de dérivations suivant est infini (lemme de König)

$$D_{n,1} := \{\overline{d_m} \mid \overline{s_{m,1}} = \overline{s_{n,1}}\}$$

(défini pour $n \in \mathbb{N}$). Soit n_1 tel que $D_{n_1,1}$ est infini. Il n'y a qu'un nombre fini de pas de réécriture marquée partant de $\overline{s_{n,1}}$, et au moins un parmi ces ensembles de dérivations suivant est infini (lemme de König)

$$D_{m,2} = \{\overline{d_p} \in D_{n_1,1} \mid \overline{s_{p,2}} = \overline{s_{m,2}}\}.$$

Soit n_2 tel que $D_{n_2,2}$ est infini. Nous avons

$$s \;_{\mathsf{bo}(k)}{\circ\!\!\longrightarrow}_{\mathcal{R}} \overline{s_{n_1,1}} \;_{\mathsf{bo}(k)}{\circ\!\!\longrightarrow}_{\mathcal{R}} \overline{s_{n_2,2}}.$$

Nous pouvons réitérer ce processus. En prenant $\overline{s_{n_0,0}} = s$, nous obtenons une suite de termes $(\overline{s_{n_i,i}})_{i\in\mathbb{N}}$ tels que pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\overline{s_{n_i,i}} \;_{\mathsf{bo}(k)}{\circ\!\!\longrightarrow}_{\mathcal{R}} \overline{s_{n_{i+1},i+1}},$$

et le système $\mathcal{R}$ ne $\mathsf{bo}(k)$-termine pas sur s. □

Lemme 3.63 (Équivalence entre terminaison et $\mathsf{bo}(k)$-terminaison pour la classe $\mathsf{LFBO}(k)$)**.** *Soient $\mathcal{R} \in \mathsf{LFBO}(k)$ et $s \in \mathcal{T}$. Le système $\mathcal{R}$ $\mathsf{bo}(k)$-termine sur s si et seulement s'il termine sur s.*

Démonstration. Clairement, si $\mathcal{R}$ ne $\mathsf{bo}(k)$-termine pas sur s, il ne termine pas sur s. Réciproquement, supposons que $\mathcal{R}$ ne termine pas sur s. D'après le lemme 3.23 page 43, pour tout n il existe une dérivation $\mathsf{bh}\ \overline{d_n} : s\ {}_{\mathsf{bh}}{\to}^n_{\mathcal{R}}\ \overline{s_n}$ effectuée de bas en haut. Comme $\mathcal{R}$ est $\mathsf{LFBO}(k)$, les dérivations $\overline{d_n}$ sont $\mathsf{bo}(k)$. Il y a des dérivations $\mathsf{bo}(k)$ de longueur arbitrairement grande qui partent de s, et d'après le lemme 3.62, $\mathcal{R}$ ne $\mathsf{bo}(k)$-termine pas sur s. □

Nous pouvons maintenant démontrer la décidabilité des problèmes de terminaison pour la classe $\mathsf{LFBO}(k)$, comme corollaire des lemmes 3.61 page 67 et 3.63.

Corollaire 3.64 (Décidabilité des problèmes de terminaison pour la classe $\mathsf{LFBO}(k)$)**.** *Les problèmes de terminaison et de u-terminaison sont décidables pour la classe* $\mathsf{LFBO}(k)$*.*

Démonstration. Soit $\mathcal{R} \in \mathsf{LFBO}(k)$. Pour tout terme s, $\mathcal{R}$ termine sur s si et seulement si $\mathcal{R}$ $\mathsf{bo}(k)$-termine sur s (lemme 3.63). Le théorème 3.61 page 67 permet de conclure. □

Nous ne savons pas si le problème de la u-terminaison est décidable pour la classe $\mathsf{LBO}(k)$. Mais il existe une procédure de décision pour le problème de terminaison. Elle s'appuiera sur le lemme suivant qui assure que si $\mathcal{R} \in \mathsf{LBO}(k)$ et si $\mathcal{R}$ $\mathsf{bo}(k)$-termine sur s, alors $[s](\to^*_{\mathcal{R}})$ est fini.

Lemme 3.65. *Si* $\mathcal{R} \in \mathsf{LBO}(k)$*, alors pour tout* $s \in \mathcal{T}$*,*

$$\begin{gathered}\mathcal{R}\ \mathsf{bo}(k)\ \textit{termine sur } s\\ \Rightarrow\\ [s](\to^*_{\mathcal{R}})\ \textit{est fini}\end{gathered}$$

Démonstration. Si $[s](\to^*_{\mathcal{R}})$ est infini, alors comme $\mathcal{R} \in \mathsf{LBO}(k)$,

$$[s](\ {}_{\mathsf{bo}(k)}{\circ{\to}}^*_{\mathcal{R}})$$

est infini. Si $\mathcal{R}$ contient une règle $l \to r \in \mathcal{R}$ avec $l \in \mathcal{V}$, alors nous pouvons construire une dérivation infinie $\mathsf{bo}(0)$ qui part de s. Sinon $\mathcal{R}$ ne contient pas de règle $l \to r$ avec $l \in \mathcal{V}$, et pour tout n,

$$[s](\ {}_{\mathsf{bo}(k)}{\circ{\to}}^n_{\mathcal{R}})$$

est fini. Il y a donc des dérivations $\mathsf{bo}(k)$ de longueur arbitrairement grande, et d'après le lemme 3.62 page 68, $\mathcal{R}$ ne $\mathsf{bo}(k)$-termine pas. □

Nous pouvons maintenant présenter la procédure de décision en remarquant que si $[s](\ {}_{\mathsf{bo}(k)}{\circ{\to}}^*_{\mathcal{R}})$ est fini, alors $\mathcal{R}$ termine sur s si et seulement s'il n'existe pas de dérivation

$$s \to^*_{\mathcal{R}} t \to^+_{\mathcal{R}} t.$$

Proposition 3.66. *Le problème de la terminaison est décidable pour la classe* $\mathsf{LBO}(k)$*.*

Démonstration. Soit $\mathcal{R} \in \mathsf{LBO}(k)$ et $s \in \mathcal{T}$. Nous appliquons la procédure de décision suivante.

1. Tester si $\mathcal{R}$ $\mathsf{bo}(k)$-termine sur s.
   — S'il ne $\mathsf{bo}(k)$-termine pas, alors $\mathcal{R}$ ne termine pas sur s.
   — S'il termine, alors :
     (a) Tester s'il existe une dérivation $s \to_{\mathcal{R}}^{*} t \to_{\mathcal{R}}^{+} t$.
        — Si oui, alors $\mathcal{R}$ ne termine pas sur s.
        — Sinon, $\mathcal{R}$ termine sur s.

Nous sommes assuré par le lemme 3.65 que si la procédure va à l'étape 1a, alors

$$[s](\to_{\mathcal{R}}^{*})$$

est fini. Il est donc possible de tester l'existence d'une boucle

$$s \to_{\mathcal{R}}^{*} t \to_{\mathcal{R}}^{+} t,$$

et la procédure de décision est correcte. □

3.10 Décidabilité des problèmes d'inverse-terminaison

3.10.1 L'inverse-terminaison pour la classe $\mathsf{LBO}(k)$ est décidable

Nous allons maintenant démontrer que le problème de la i-terminaison est décidable pour la classe $\mathsf{LBO}(k)$. C'est d'ailleurs le cas pour tout système linéaire à gauche qui i-préserve la reconnaissabilité. Ce résultat est sans doute connu, et figure certainement sous une forme ou une autre dans la littérature à ce sujet, mais nous n'avons pas trouvé de démonstration, et nous en présentons une ici. Comme dans la section précédente, nous utilisons implicitement le lemme de König.

Proposition 3.67. *Soit $\mathcal{R}$ un système de réécriture linéaire à gauche qui i-préserve la reconnaissabilité. Le problème de la i-terminaison pour $\mathcal{R}$ est décidable.*

Nous allons démontrer cette proposition à l'aide des lemmes suivants. Dans ce qui suit, $\mathcal{R}$ désigne un système de réécriture linéaire à gauche, mais qui ne vérifie pas nécessairement $\mathcal{V}\mathsf{ar}(r) \subseteq \mathcal{V}\mathsf{ar}(l)$.

Lemme 3.68. *Pour tout terme $s \in \mathcal{T}$, si*

$$(\to_{\mathcal{R}}^{*})[s]$$

est infini, alors $\mathcal{R}$ ne i-termine pas sur s.

Démonstration. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\to_{\mathcal{R}}^{n})[s]$ est fini, alors comme $(\to_{\mathcal{R}}^{*})[s]$ est infini, il y a nécessairement une dérivation i-infinie qui part de s (lemme de König). Sinon, il existe un terme t tel que

$$t \to_{\mathcal{R}}^{*} s,$$

et tel que l'ensemble

$$(\to_{\mathcal{R}})[t],$$

est infini. Pour que cet ensemble soit infini, il n'y a que deux cas possibles.

— Soit $\mathcal{R}$ contient une règle $l \to r$ avec $r = x \in \mathcal{V}$, et nous pouvons fabriquer une dérivation i-infinie qui part de s en utilisant cette règle.

— Soit il existe une règle $l \to r \in \mathcal{R}$ telle que $\mathcal{V}\mathsf{ar}(r) \subset \mathcal{V}\mathsf{ar}(l)$, une position v, et une substitution σ telle que

$$t = t[r\sigma]_v.$$

Montrons que nous pouvons fabriquer une dérivation i-infinie qui part de s. Soient $x \in \mathcal{V}\mathsf{ar}(l)\backslash\mathcal{V}\mathsf{ar}(r)$, et τ_0 la substitution définie par

$$\forall y \in \mathcal{V}\mathsf{ar}(l)\backslash\{x\}, y\tau_0 = y\sigma, \text{ et } x\tau_0 = r\tau',$$

ou τ' est une substitution qui envoie chaque variable sur une constante $c \in \mathcal{F}$

$$\forall y, y\tau' = c.$$

Nous avons un pas de réécriture

$$t_1 = t[l\tau_0]_v \to_{\mathcal{R}} t = t[r\tau_0]_v,$$

et

$$t_1 = t_1[r\tau']_{v\cdot\mathsf{pos}(l,x)},$$

où nous avons à nouveau la variable x qui est dans $\mathcal{V}\mathsf{ar}(l)$ et pas dans $\mathcal{V}\mathsf{ar}(r)$. Nous refaisons la même chose avec t_1 à la position $v \cdot \mathsf{pos}(l,x)$ et obtenons

$$t_2 = t_1[l\tau_1]_{v\cdot\mathsf{pos}(l,x)} \to t_1 = t_1[r\tau_1]_{v\cdot\mathsf{pos}(l,x)},$$

ou τ_1 est définie par

$$\forall x \in \mathcal{V}\mathsf{ar}(r), x\tau_0 = x\tau', \text{ et } \forall x \in \mathcal{V}\mathsf{ar}(l)\backslash\mathcal{V}\mathsf{ar}(r), x\tau_1 = r\tau'.$$

En réitérant ce procédé à l'infini, nous obtenons une dérivation i-infinie qui part de s.

Le résultat est vérifié. □

Remarque 3.69. *Dans la preuve du lemme 3.68, nous avons vu que dans le cas où il y a une règle $l \to r \in \mathcal{R}$ telle que $r \in \mathcal{V}$, alors il est possible de construire une dérivation i-infinie qui part de n'importe quel terme s, et telle que tous les pas soit $\mathsf{bo}(0)$, et $\mathcal{R}$ ne i-$\mathsf{bo}(0)$-termine sur aucun terme. De même, nous avons vu que s'il y a une règle $l \to r \in \mathcal{R}$ telle que $\mathcal{V}\mathsf{ar}(r)\backslash\mathcal{V}\mathsf{ar}(l) \neq \emptyset$, alors il y a une dérivation i-infinie qui part de tout terme de la forme*

$$t = t[r\sigma]_v.$$

Il est facilement vérifiable que la dérivation construite est une dérivation i-$\mathsf{bo}(0)$ infinie, et $\mathcal{R}$ ne i-$\mathsf{bo}(0)$-termine pas sur t.

Lemme 3.70. *Soit $\mathcal{R}$ un système de réécriture linéaire à gauche et $s \in \mathcal{T}$. Si*

$$(\to^*_{\mathcal{R}})[s]$$

est fini, alors nous pouvons décider si $\mathcal{R}$ i-termine sur s.

Démonstration. En effet, si
$$(\rightarrow^*_{\mathcal{R}})[s]$$
est fini, alors $\mathcal{R}$ ne i-termine pas sur s si et seulement s'il existe un terme t et une boucle
$$t \rightarrow^+_{\mathcal{R}} t \rightarrow^*_{\mathcal{R}} s.$$
La présence d'une telle boucle est décidable lorsque l'ensemble $(\rightarrow^*_{\mathcal{R}})[s]$ est fini. □

Nous pouvons maintenant démontrer la proposition 3.67 page 70.

Preuve de la proposition 3.67. Soit $\mathcal{R}$ un système linéaire à gauche. Supposons que $\mathcal{R}$ i-préserve la reconnaissabilité et montrons que la i-terminaison est décidable. Nous suivons la procédure de décision suivante.

1. Construire $(\rightarrow^*_{\mathcal{R}})[s]$.
2. Tester si $(\rightarrow^*_{\mathcal{R}})[s]$ est infini.
   — S'il est infini, $\mathcal{R}$ ne i-termine pas sur s
   — Sinon, tester s'il existe une dérivation $t \rightarrow^+_{\mathcal{R}} t \rightarrow^*_{\mathcal{R}} s$. Si une telle dérivation existe, alors $\mathcal{R}$ ne i-termine pas sur s. Sinon, $\mathcal{R}$ i-termine sur s.

   Comme $\mathcal{R}$ i-préserve la reconnaissabilité, on peut tester si $(\rightarrow^*_{\mathcal{R}})[s]$ est infini. Les lemmes 3.68 page 70 et 3.70 page 71 nous assurent de la correction de la procédure.

□

Corollaire 3.71 (Décidabilité de la i-terminaison pour $\mathsf{LBO}(k)$)**.** *Le problème de la i-terminaison pour la classe* $\mathsf{LBO}(k)$ *est décidable.*

Démonstration. D'après le corollaire 3.59 page 66, tout système de la classe $\mathsf{LBO}(k)$ i-préserve la reconnaissabilité. La proposition 3.67 permet de conclure. □

3.10.2 Décidabilité de la i-u-$\mathsf{bo}(k)$-terminaison

Dans cette section $\mathcal{R}$ désigne un système linéaire. Nous avons vu (remarque 3.69) que s'il existe une règle $l \rightarrow r$ avec $r \in \mathcal{V}$, ou telle que $\mathcal{V}\mathsf{ar}(r) \subset \mathcal{V}\mathsf{ar}(l)$, alors $\mathcal{R}$ ne i-u-bo(0)-termine. Dans la suite de ce chapitre, nous supposerons donc que $\mathcal{R}$ ne contient pas de telles règles, i.e. pour tout $l \rightarrow r \in \mathcal{R}$, $\mathcal{V}\mathsf{ar}(l) = \mathcal{V}\mathsf{ar}(r)$ et $r \notin \mathcal{V}$. Nous allons montrer que $\mathcal{R}$ i-u-$\mathsf{bo}(0)$-termine si et seulement si $\mathcal{S}$ i-u-termine, ou $\mathcal{S}$ est le système fabriqué pour simuler les dérivations $\mathsf{bo}(0)$.

Définition 3.72. *Soit* $\bar{t} \in \overline{\mathcal{T}}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$. *Nous utilisons la notation* $\mathsf{N}_{>0}(\bar{t})$ *pour désigner le nombre de positions* $u \in \mathcal{P}\mathsf{os}(t)$ *ayant une marque strictement positive dans* $\bar{t}$
$$\mathsf{N}_{>0}(\bar{t}) := \mathsf{Card}(\{u \in \mathcal{P}\mathsf{os}(t) \mid \mathsf{m}(\bar{t}/u) > 0\}).$$

Dans la suite, $\mathcal{A}$ désigne un automate déterministe complet quelconque (il faut en considérer un pour pouvoir définir Top_0).

Lemme 3.73. *Soient* $\overline{s}, \overline{t} \in \overline{\mathcal{T}}$ *bien marqués pour* 0 *et tels que* $\overline{s} \;{}_{\mathsf{bo}(0)}\!\circ\!\!\longrightarrow_{\mathcal{R},l\to r} \overline{t}$. *Nous avons*

$$\mathsf{N}_{>0}(\overline{s}) \leq \mathsf{N}_{>0}(\overline{t}).$$

De plus, si $\mathsf{N}_{>0}(\overline{s}) = \mathsf{N}_{>0}(\overline{t})$, *alors*

$$\mathsf{Top}_0(\overline{s}) \to_{\mathcal{S}} \mathsf{Top}_0(\overline{t})$$

où $\mathcal{S} = \{l\tau \to r\tau \mid \tau : \mathcal{V} \to \mathcal{Q}\}$ *est le système clos de la définition 3.51 page 59.*

Démonstration. Soient $\overline{s}, \overline{t} \in \overline{\mathcal{T}}$ bien marqués pour 0 et tels que

$$\overline{s} = \overline{s}[l\overline{\sigma}]_v \;{}_{\mathsf{bo}(0)}\!\circ\!\!\longrightarrow_{\mathcal{R}} \overline{t} = \overline{s}[r(\overline{\sigma} \odot 1)]_v.$$

Montrons que $\mathsf{N}_{>0}(\overline{s}) \leq \mathsf{N}_{>0}(\overline{t})$. Nous avons

$$\mathsf{N}_{>0}(\overline{s}) = \mathsf{N}_{>0}(\overline{s}[]_v) + \mathsf{N}_{>0}(l) + \sum_{x \in \mathcal{V}\mathsf{ar}(l)} \mathsf{N}_{>0}(x\overline{\sigma})$$

et

$$\mathsf{N}_{>0}(\overline{t}) = \mathsf{N}_{>0}(\overline{s}[]_v) + \mathsf{N}_{>0}(r) + \sum_{x \in \mathcal{V}\mathsf{ar}(r)} \mathsf{N}_{>0}(x\overline{\sigma} \odot 1).$$

Comme $l, r \in \mathcal{T}$,

$$\mathsf{N}_{>0}(l) = \mathsf{N}_{>0}(r) = 0.$$

Soit $x \in \mathcal{V}\mathsf{ar}(r)$. Par définition de $\odot$, pour tout $u \in \mathcal{P}\mathsf{os}(x\overline{\sigma} \odot 1)$, $\mathsf{m}(x\overline{\sigma} \odot 1/u) > 0$. Ainsi,

$$\mathsf{N}_{>0}(x\overline{\sigma}) \leq \mathsf{N}_{>0}(x\overline{\sigma} \odot 1) = \mathsf{Card}(\mathcal{P}\mathsf{os}(x\overline{\sigma})).$$

De plus, comme nous supposons que $\mathcal{V}\mathsf{ar}(r) = \mathcal{V}\mathsf{ar}(l)$,

$$\sum_{x \in \mathcal{V}\mathsf{ar}(l)} \mathsf{N}_{>0}(x\overline{\sigma}) \leq \sum_{x \in \mathcal{V}\mathsf{ar}(r)} \mathsf{N}_{>0}(x\overline{\sigma} \odot 1),$$

et

$$\mathsf{N}_{>0}(\overline{s}) \leq \mathsf{N}_{>0}(\overline{t}).$$

Supposons maintenant que $\mathsf{N}_{>0}(\overline{s}) = \mathsf{N}_{>0}(\overline{t})$, et montrons que

$$\mathsf{Top}_0(\overline{s}) \to_{\mathcal{S}} \mathsf{Top}_0(\overline{t}).$$

Comme $\mathsf{N}_{>0}(\overline{s}) = \mathsf{N}_{>0}(\overline{t})$,

$$\sum_{x \in \mathcal{V}\mathsf{ar}(l)} \mathsf{N}_{>0}(x\overline{\sigma}) = \sum_{x \in \mathcal{V}\mathsf{ar}(r)} \mathsf{N}_{>0}(x\overline{\sigma} \odot 1).$$

Soit $x \in \mathcal{V}\mathsf{ar}(r)$. Nous avons

$$\mathsf{N}_{>0}(x\overline{\sigma} \odot 1) = \mathsf{Card}(\mathcal{P}\mathsf{os}(x\sigma)).$$

Donc, $\mathsf{N}_{>0}(x\overline{\sigma}) = \mathsf{Card}(\mathcal{P}\mathsf{os}(x\sigma))$, et toutes les marques sur $x\sigma$ sont différentes de 0. Par définition de Top_0,

$$\mathsf{Top}_0(x\overline{\sigma}) = \mathsf{Top}_0(x\overline{\sigma} \odot 1) = x\sigma \downarrow_{\mathcal{A}},$$

et par définition de $\mathcal{S}$,

$$l\mathsf{Top}_0(\overline{\sigma}) \to r\mathsf{Top}_0(\overline{\sigma} \odot 1) \in \mathcal{S}.$$

Nous avons vu dans la preuve du lemme 3.52 page 59 que

$$\mathsf{Top}_0(\overline{s}) = \mathsf{Top}_0(\overline{s})[(l\mathsf{Top}_0(\overline{\sigma}))]_v, \mathsf{Top}_0(\overline{t}) = \mathsf{Top}_0[r\mathsf{Top}_0(\overline{\sigma} \odot 1)]_v.$$

Nous pouvons conclure que

$$\mathsf{Top}_0(\overline{s}) \to_{\mathcal{S}} \mathsf{Top}_0(\overline{t}).$$

$\square$

Définition 3.74. *Soit $\overline{t} \in \mathcal{T}(\mathcal{F}^{\mathbb{N}} \cup \mathcal{Q}, \mathcal{V})$, et $\overline{s} \in \overline{\mathcal{T}}$ un terme. Nous notons $\mathsf{ren}_{\mathcal{Q}\to\overline{s}}(\overline{t})$ le terme obtenu à partir de $\overline{t}$ en remplaçant tous les états $q \in \mathcal{Q}$ dans $\overline{t}$ par le terme $\overline{s}$*

$$\mathsf{ren}_{\mathcal{Q}\to\overline{s}}(\overline{t}) := \overline{t}[\overline{s}, \ldots, \overline{s}]_{\mathcal{P}\mathsf{os}_{\mathcal{Q}}(t)}.$$

Lemme 3.75. *Soient $s, t \in \mathcal{T}(\mathcal{F} \cup \mathcal{Q})$ tels que*

$$s \to_{\mathcal{S}} t.$$

Pour tout constante $c \in \mathcal{F}_0$,

$$\mathsf{ren}_{\mathcal{Q}\to c^1}(s) \ {}_{\mathsf{bo}(0)}{\circ\!\!\to}_{\mathcal{R}} \ \mathsf{ren}_{\mathcal{Q}\to c^1}(t).$$

Démonstration. Soient $s, t \in \mathcal{T}(\mathcal{F} \cup \mathcal{Q})$ tels que $s \to_{\mathcal{S}} t$. Soit $c \in \mathcal{F}_0$. Par définition, il existe $l \to r \in \mathcal{R}, v \in \mathcal{P}\mathsf{os}(s)$, et $\tau : \mathcal{V} \to \mathcal{Q}$ tels que

$$s = s[l\tau]_v, t = s[r\tau]_v.$$

Soit $\overline{\sigma}$ la substitution définie par $\forall x \in \mathcal{V}\mathsf{ar}(r)$,

$$x\overline{\sigma} = c^1.$$

Nous avons

$$\mathsf{ren}_{\mathcal{Q}\to c^1}(s) = \mathsf{ren}_{\mathcal{Q}\to c^1}(s)[l\overline{\sigma}]_v, \mathsf{ren}_{\mathcal{Q}\to c^1}(t) = \mathsf{ren}_{\mathcal{Q}\to c^1}(s)[r\overline{\sigma}]_v.$$

De plus, par définition de $\odot$, $\forall x \in \mathcal{V}\mathsf{ar}(r)$,

$$x\overline{\sigma} \odot 1 = c^1 \odot 1 = c^1.$$

Il y a donc un pas de réécriture marquée

$$\mathsf{ren}_{\mathcal{Q}\to c^1}(s) = \mathsf{ren}_{\mathcal{Q}\to c^1}(s)[l\overline{\sigma}]_v \ {\circ\!\!\to} \ \mathsf{ren}_{\mathcal{Q}\to c^1}(s)[r(\overline{\sigma} \odot 1)]_v = \mathsf{ren}_{\mathcal{Q}\to c^1}(t).$$

Comme $l \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ et comme pour tout $u \prec v$, $\mathsf{m}(\mathsf{ren}_{\mathcal{Q}\to c^1}(s)/u) = 0$, ce pas est $\mathsf{bo}(0)$ et nous avons

$$\mathsf{ren}_{\mathcal{Q}\to c^1}(s) = \mathsf{ren}_{\mathcal{Q}\to c^1}(s)[l\overline{\sigma}]_v \ {}_{\mathsf{bo}(0)}{\circ\!\!\to} \ \mathsf{ren}_{\mathcal{Q}\to c^1}(s)[r(\overline{\sigma} \odot 1)]_v = \mathsf{ren}_{\mathcal{Q}\to c^1}(t).$$

$\square$

Nous pouvons maintenant démontrer que $\mathcal{R}$ i-u-$\mathsf{bo}(0)$-termine si et seulement si $\mathcal{S}$ i-u-termine.

Lemme 3.76. *Le système $\mathcal{R}$ i-u-$\mathsf{bo}(0)$-termine si et seulement si le système $\mathcal{S}$ i-u-termine.*

Démonstration. Commençons par montrer que si le système $\mathcal{S}$ ne i-u-termine pas, alors $\mathcal{R}$ ne i-u-$\mathsf{bo}(0)$-termine pas. Par définition, il existe une suite infinie de termes $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $s_i \in \mathcal{T}(\mathcal{F} \cup \mathcal{Q})$ et

$$s_{i+1} \to_{\mathcal{S}} s_i.$$

Soit $c \in \mathcal{F}_0$. D'après le lemme 3.75, pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\mathsf{ren}_{Q\to c^1}(\overline{s_{i+1}}) \;{}_{\mathsf{bo}(0)}\!\circ\!\!\longrightarrow_{\mathcal{R}} \mathsf{ren}_{Q\to c^1}(\overline{s_i}),$$

et $\mathcal{R}$ ne i-$\mathsf{bo}(0)$-termine pas sur $\mathsf{ren}_{Q\to c^1}(\overline{s_0})^0$ (et donc ne i-u-$\mathsf{bo}(0)$-termine pas).
Réciproquement, supposons que $\mathcal{R}$ ne i-u-$\mathsf{bo}(0)$-termine. Comme $\mathcal{R}$ ne i-u-$\mathsf{bo}(0)$-termine pas, il existe une suite infinie $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de termes bien marqués pour 0 telle que $s_0 = s$ et pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\overline{s_{i+1}} \;{}_{\mathsf{bo}(0)}\!\circ\!\!\longrightarrow_{\mathcal{R}} \overline{s_i}.$$

D'après le lemme 3.73, pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \mathsf{N}_{>0}(\overline{s_{i+1}}) \leq \mathsf{N}_{>0}(\overline{s_i}).$$

Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $i > N$,

$$\mathsf{N}_{>0}(\overline{s_{i+1}}) = \mathsf{N}_{>0}(\overline{s_i}).$$

D'après le lemme 3.73, pour tout $i > N$,

$$\mathsf{Top}_0(\overline{s_{i+1}}) \to_{\mathcal{S}} \mathsf{Top}_0(\overline{s_i}).$$

Ainsi, il existe une dérivation i-infinie dans $\mathcal{S}$ qui part de $\mathsf{Top}_0(\overline{s_N})$, et $\mathcal{S}$ ne i-u-termine pas.
Nous avons montré que $\mathcal{R}$ i-u-$\mathsf{bo}(0)$-termine si et seulement si le système $\mathcal{S}$ i-u-termine. □

Théorème 3.77 (Décidabilité du problème de la i-u-terminaison pour la stratégie $\mathsf{bo}(k)$)**.** *Le problème de la i-u-$\mathsf{bo}(k)$-terminaison est décidable.*

Démonstration. D'après le point 4 de la proposition 3.48 page 56, il suffit de démontrer ce résultat pour $k = 0$. Soit $\mathcal{R}$ un système linéaire. Soit $\mathcal{A}$ un automate déterministe complet. Soit $\mathcal{S}$ le système de la définition 3.51 page 59 construit pour le système $\mathcal{R}$ et $\mathcal{A}$. D'après le lemme 3.76, il suffit de décider de la i-u-terminaison de $\mathcal{S}$ pour décider de la i-u-$\mathsf{bo}(0)$-terminaison de $\mathcal{R}$. Comme $\mathcal{S}$ est un système clos, $\mathcal{S}^{-1}$ est lui aussi un système clos, et nous pouvons décider (théorème 3.60 page 67) si $\mathcal{S}$ i-u-termine. Le problème de la i-u-$\mathsf{bo}(k)$-terminaison est donc décidable. □

Nous pouvons maintenant montrer que le problème de la i-u-terminaison est décidable pour la classe des systèmes $\mathsf{LFBO}(k)$, en nous appuyant sur le théorème précédent, et le lemme suivant.

Lemme 3.78. *Pour tout système $\mathcal{R} \in \mathsf{LFBO}(k)$,*

$$\mathcal{R} \textit{ i-u-}\mathsf{bo}(k)\textit{-termine}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\mathcal{R} \textit{ i-u-termine.}$$

Démonstration. S'il existe une règle $l \to r \in \mathcal{R}$ telle que $r \in \mathcal{V}$, ou $\mathcal{V}\mathsf{ar}(r) \subset \mathcal{V}\mathsf{ar}(l)$, alors le système ne i-u-$\mathsf{bo}(0)$-termine pas, et donc ne i-u-termine pas (voir remarque 3.69). Soit $\mathcal{R}$ tel que pour toute règle $l \to r, \mathcal{V}\mathsf{ar}(r) = \mathcal{V}\mathsf{ar}(l)$. Il est clair que si $\mathcal{R}$ ne i-u-$\mathsf{bo}(k)$-termine pas, alors $\mathcal{R}$ ne i-u-termine pas. Réciproquement, supposons que $\mathcal{R}$ ne i-u-termine pas. Alors, il existe une suite infinie de termes $(\overline{s_i})_{i\in\mathbb{N}}$ bien marqués pour k telle que que pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\overline{s_{i+1}} \;{}_{\mathsf{bo}(k)}{\circ\!\!\longrightarrow}\; \overline{s_i}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons donc une dérivation

$$\overline{d_n} = \overline{s_0} \;{}_{\mathsf{bo}(k)}{\circ\!\!\longrightarrow}^n\; \overline{s_n}.$$

D'après la proposition 3.23 page 43, pour tout n il y a une dérivation bh qui arrive sur une version bien marquée pour k de s_0. Comme il n'y a qu'un nombre fini de version bien marquées pour k de s_0, il y a une infinité de dérivations bh qui arrivent sur une même version marquée de $\widetilde{s_0}$ (lemme de König). Comme pour tout $l \to r \in \mathcal{R}$, $\mathcal{V}\mathsf{ar}(r) = \mathcal{V}\mathsf{ar}(l)$, pour tout n, l'ensemble

$${}_{\mathsf{bh}}{\circ\!\!\longrightarrow}^n_{\mathcal{R}}\; [\widetilde{s_0}]$$

est fini. Il y a donc des dérivations inverses bh de longueur arbitrairement grande qui partent de $\widetilde{s_0}$. Comme $\mathcal{R}$ est $\mathsf{LFBO}(k)$, toutes ses dérivations sont $\mathsf{bo}(k)$ et il y a donc des dérivations i-$\mathsf{bo}(k)$ de longueur arbitrairement grande qui partent de $\widetilde{s_0}$, et $\mathcal{R}$ ne i-u-$\mathsf{bo}(k)$-termine pas (lemme de König). □

Corollaire 3.79 (Décidabilité de la i-u-terminaison pour la classe $\mathsf{LFBO}(k)$)**.** *Le problème de la i-u-terminaison est décidable pour la classe* $\mathsf{LFBO}(k)$*.*

Démonstration. Soit $\mathcal{R} \in \mathsf{LFBO}(k)$. D'après le lemme 3.78, $\mathcal{R}$ i-u-$\mathsf{bo}(k)$-termine si et seulement s'il i-u-termine. D'après le théorème 3.77 page 75, il est possible de décider si $\mathcal{R}$ i-u-$\mathsf{bo}(k)$-termine. Le problème de la i-u-terminaison est donc décidable pour la classe $\mathsf{LFBO}(k)$. □

3.11 Décidabilité de l'appartenance à $\mathsf{LFBO}(k)$

3.11.1 Présentation du chapitre

Nous allons commencer par démontrer que l'appartenance à la classe $\mathsf{LFBO}(k)$ est décidable en définissant un critère d'appartenance testable (grâce à la i-préservation de la reconnaissabilité pour la stratégie $\mathsf{bo}(k)$). Dans la section 3.13, nous montrerons que de nombreux systèmes sont inclus dans cette classe en particulier, les systèmes $i - \mathsf{LFPO}$ de [85].

3.11.2 Critère de non-appartenance à $\mathsf{LFBO}(k)$

Rappelons qu'une dérivation $\mathsf{bhbo}(k)$ est une dérivation bh qui est $\mathsf{bo}(k)$, et qu'un système est $\mathsf{LFBO}(k)$ si toute dérivation bh est $\mathsf{bo}(k)$. Autrement dit, pour tester qu'un système est $\mathsf{LFBO}(k)$ il faut vérifier qu'il n'existe pas de dérivation bh qui est $\mathsf{bo}(k')$, pour un $k' > k$, mais qui n'est pas $\mathsf{bo}(k)$.

Définition 3.80. *Nous notons* d *la profondeur maximale d'un membre gauche*

$$\mathsf{d}(\mathcal{R}) := \max\{dpt(l) \mid l \in \mathsf{LHS}(\mathcal{R})\}.$$

Dans ce qui suit, nous noterons d ce qui devrait être noté $\mathsf{d}(\mathcal{R})$. Nous allons maintenant donner un critère pour décider de la non-appartenance à $\mathsf{LFBO}(k)$: un système n'appartient pas à $\mathsf{LFBO}(k)$ si et seulement il existe une dérivation $\mathsf{bhbo}(k + \mathsf{d} - 1)$ qui n'est pas $\mathsf{bo}(k)$. Nous montrerons ensuite que ce critère est testable.

Lemme 3.81 (Critère de non-appartenance à $\mathsf{LFBO}(k)$)**.** *Le système $\mathcal{R}$ n'appartient pas à $\mathsf{LFBO}(k)$ si et seulement s'il existe $s \in \mathcal{T}$, $\bar{t} \in \overline{\mathcal{T}}$, $v \in \mathcal{P}\mathsf{os}(t)$, $l \to r \in \mathcal{R}$, $\bar{l} \in \overline{\mathcal{T}}(\mathcal{V})$, et $\bar{\sigma} : \mathcal{V} \to \overline{\mathcal{T}}$ tels que*

1. $s \;{}_{\mathsf{bhbo}(k)}{\circ\!\!\rightarrow}^*_{\mathcal{R}}\; \bar{t}$,
2. $\bar{t} = \bar{t}[\bar{l}\bar{\sigma}]_v$,
3. $k < \mathsf{mmax}(\bar{l}) \leq k + \mathsf{d} - 1$,
4. $\mathsf{m}(\bar{l}) = 0$.

Démonstration. S'il existe $s \in \mathcal{T}$, $\bar{t} \in \overline{\mathcal{T}}$, $v \in \mathcal{P}\mathsf{os}(t)$, $l \to r \in \mathcal{R}$, $\bar{l} \in \overline{\mathcal{T}}(\mathcal{V})$, et $\bar{\sigma} : \mathcal{V} \to \overline{\mathcal{T}}$ qui satisfont 1 2, 3 , et 4 alors il y a une dérivation $\mathsf{bhbo}(k + \mathsf{d} - 1)$

$$s \;{}_{\mathsf{bhbo}(k)}{\circ\!\!\rightarrow}^*_{\mathcal{R}}\; \bar{t} = \bar{t}[\bar{l}\bar{\sigma}]_v \;{}_{\mathsf{bhbo}(k+\mathsf{d}-1)}{\circ\!\!\rightarrow}\; \bar{t}[r(\bar{\sigma} \odot 1)]_v.$$

C'est la condition 3 qui garantie que le dernier pas est $\mathsf{bo}(k + \mathsf{d} - 1)$ sans être $\mathsf{bo}(k)$. Le point 4 nous assure qu'il est bh. Il y a donc une dérivation bh qui n'est pas $\mathsf{bo}(k)$. Par conséquent, $\mathcal{R}$ n'est pas $LFBO(k)$.
Réciproquement, supposons que $\mathcal{R} \notin \mathsf{LFBO}(k)$. Il existe une dérivation bh

$$\overline{d} : s_0 \;{}_{\mathsf{bh}}{\circ\!\!\rightarrow}^n_{\mathcal{R}}\; \overline{s_n},$$

dont le dernier pas est bh mais n'est pas $\mathsf{bo}(k)$. Nous avons

$$s_0 \;{}_{\mathsf{bhbo}(k)}{\circ\!\!\rightarrow}^{n-1}\; \overline{s_{n-1}} \text{ et } \overline{s_{n-1}} \;{}_{\mathsf{bh}}{\circ\!\!\rightarrow}_{\mathcal{R}}\; \overline{s_n}.$$

Le pas bh

$$\begin{aligned} \overline{s_{n-1}} &= \overline{s_{n-1}}[\overline{l_{n-1}}\overline{\sigma_{n-1}}]_{v_{n-1}} \\ &\quad {}_{\mathsf{bh}}{\circ\!\!\rightarrow}_{\mathcal{R},l_{n-1}\to r_{n-1},v_{n-1},\sigma_{n-1}} \; \overline{s_n} = \overline{s_{n-1}}[r_{n-1}(\overline{\sigma_{n-1}} \odot 1)]_{v_{n-1}} \end{aligned}$$

n'est pas $\mathsf{bo}(k)$. Nous avons montré que $s_0 \in \mathcal{T}$, $\overline{s_{n-1}} \in \overline{\mathcal{T}}$, $v_{n-1} \in \mathcal{P}\mathsf{os}(s_{n-1})$, $l_{n-1} \to r_{n-1} \in \mathcal{R}$, $\overline{l_{n-1}} \in \overline{\mathcal{T}}(\mathcal{V})$, et $\overline{\sigma_{n-1}}$ satisfont

1. $\overline{s_{n-1}} = \overline{s_{n-1}}[\overline{l_{n-1}}\overline{\sigma_{n-1}}]_{v_{n-1}}$,
2. $s_0 \;{}_{\mathsf{bhbo}(k)}{\circ\!\!\rightarrow}^*_{\mathcal{R}}\; \overline{s_{n-1}}$.

Le point 4 est vérifié puisque la dérivation jusqu'à $\overline{s_n}$ est bh. Il nous reste à montrer que le point 3 est lui aussi satisfait. Comme le pas n'est pas $\mathsf{bo}(k)$, nous avons $\mathsf{mmax}(\overline{l_{n-1}}) > k$, et $l_{n-1} \notin \mathcal{V}$. Pour montrer que le point 3 est satisfait, il reste à montrer que $\mathsf{mmax}(\overline{l_{n-1}}) \leq k + \mathsf{d} - 1$. Le pas est bh et $\mathsf{m}(\overline{l_{n-1}}) = 0$. D'après le lemme 3.17 page 39, le terme $\overline{s_{n-1}}$ est bien marqué pour k. Par définition de bien marqué pour k, comme $\mathsf{m}(\overline{s_{n-1}}/v_{n-1}) = \mathsf{m}(\overline{l_{n-1}}) = 0$ et comme $\mathsf{m}(\overline{s_{n-1}}/v_{n-1} \cdot w) = \mathsf{m}(\overline{l_{n-1}}/w) > k$, il existe une position $u \in \mathcal{P}\mathsf{os}^{\preceq w}(l_{n-1})$, telle que

$$\forall p \in \mathcal{P}\mathsf{os}^{\succeq v_{n-1} \cdot u}(s_{n-1}), \mathsf{m}(\overline{s_{n-1}}/p) = k + 1 + |v_{n-1} \cdot p| - |v_{n-1} \cdot u|.$$

Nous avons donc

$$\mathsf{m}(\overline{l_{n-1}}/w) = k + 1 + |v_{n-1} \cdot w| - |v_{n-1} \cdot u| = k + 1 - |w| - |u|.$$

Par définition de *dpt*, $|w| \leq \mathsf{d} - 1$. De plus $u \neq \epsilon$ puisque $\mathsf{m}(\overline{l_{n-1}}/\epsilon) = 0$ et $\mathsf{m}(\overline{l_{n-1}}/u) > k$. Donc, $|u| \geq 1$ et $|w| - |u| \leq \mathsf{d} - 2$. Nous obtenons

$$\mathsf{m}(\overline{l_{n-1}}/w) = k + 1 + |w| - |u| \leq k + 1 + \mathsf{d} - 2 = k + \mathsf{d} - 1.$$

Le résultat est démontré. $\square$

Remarque 3.82. *Ce critère montre que tout système $\mathcal{R}$ tel que $\mathsf{d}(\mathcal{R}) \leq 1$, est dans la classe $\mathsf{LFBO}(0)$. En effet, si $\mathsf{LHS}(\mathcal{R}) \leq 1$, alors tout pas de réécriture bh $\overline{s} = \overline{s}[\overline{l}\overline{\sigma}]_v \ {}_{\mathsf{bh}}\!\circ\!\!\longrightarrow \overline{s}[r(\overline{\sigma} \odot 1)]$ est $\mathsf{bo}(0)$. En effet :*

— *Si $l \in \mathcal{V}$, alors par définition d'un pas bh, $\forall u \prec v, \mathsf{m}(\overline{s}/u) = 0$, et le pas est $\mathsf{bo}(0)$.*

— *Et si $l \in \mathcal{F}_0 \cup \{f(x_0, \ldots, x_{n-1}) \mid f \in \mathcal{F}_n\}$, alors par définition de bh, $\mathsf{m}(\overline{l}) = \mathsf{mmax}(\overline{l}) = 0$, et le pas est $\mathsf{bo}(0)$.*

Le critère de non-appartenance à $\mathsf{LFBO}(0)$ ne peut donc jamais être vérifié lorsque $\mathsf{d}(\mathcal{R}) \leq 1$.

Dans ce qui suit, $\mathcal{A}$ est l'automate déterministe complet à un état q.

Définition 3.83. *Nous notons $\overline{\mathsf{L}}$ l'ensemble des termes $\overline{s} \in \mathcal{T}(\mathcal{F}^{\mathbb{N}} \cup \{q\})$ bien marqués pour k et tels qu'il existe $v \in \mathbb{N}^*$, $\overline{\sigma} : \mathcal{V} \to \overline{\mathcal{T}}$, $l \to r \in \mathcal{R}$, $\overline{l} \in \overline{\mathcal{T}}(\mathcal{V})$, tels que*

$$\overline{s} = \overline{s}[\overline{l}\overline{\sigma}]_v, k < \mathsf{mmax}(\overline{l}) \leq k + d - 1, \text{ et } \mathsf{m}(\overline{l}) = 0.$$

Notons que la condition $k < \mathsf{mmax}(\overline{l}) \leq k + d - 1$, et $\mathsf{m}(\overline{l}) = 0$ dans la définition de $\overline{\mathsf{L}}$ implique que $l \notin \mathcal{V} \cup \mathcal{F}_0$. Nous pouvons ramener notre problème de décidabilité à un test au vide.

Corollaire 3.84. *Le système $\mathcal{R}$ est $\mathsf{LFBO}(k)$ si et seulement si*

$$({}_{\mathsf{bhbo}(k+\mathsf{d}-1)}\!\circ\!\!\longrightarrow^*_{\mathcal{R}})[\overline{\mathsf{L}}] \cap \mathcal{T} = \emptyset.$$

Démonstration. Si $({}_{\mathsf{bhbo}(k+\mathsf{d}-1)}\!\circ\!\!\longrightarrow^*_{\mathcal{R}})[\overline{\mathsf{L}}] \cap \mathcal{T} \neq \emptyset$, alors il existe $s \in \mathcal{T}$, $\overline{t}$ un terme bien marqué pour k, $v \in \mathcal{P}\mathsf{os}(t)$, $\overline{\sigma} : \mathcal{V} \to \overline{\mathcal{T}}$, $l \to r \in \mathcal{R}$, $\overline{l} \in \overline{\mathcal{T}}(\mathcal{V})$, tels que $k < \mathsf{mmax}(\overline{l}) \leq k + \mathsf{d} - 1$, $\mathsf{m}(\overline{l}) = 0$, et

$$s \ {}_{\mathsf{bhbo}(k+\mathsf{d}-1)}\!\circ\!\!\longrightarrow^*_{\mathcal{R}} \overline{t} = \overline{t}[\overline{l}\overline{\sigma}]_v$$

Nous avons une dérivation bh

$$s \ {}_{\mathsf{bhbo}(k+\mathsf{d}-1)}{\circ\!\!\longrightarrow}^*_{\mathcal{R}} \ \bar{t} \ {}_{\mathsf{bhbo}(k+\mathsf{d}-1)}{\circ\!\!\longrightarrow}_{\mathcal{R}} \ \bar{t}[r(\overline{\sigma} \odot 1)]$$

qui n'est pas $\mathsf{bo}(k)$ (puisque $\mathsf{mmax}(\bar{l}) > k$). Le système $\mathcal{R}$ n'appartient pas à $\mathsf{LFBO}(k)$. Réciproquement, si $({}_{\mathsf{bhbo}(k+\mathsf{d})}{\circ\!\!\longrightarrow}^*_{\mathcal{R}})[\overline{\mathsf{L}}] \cap \mathcal{T} = \emptyset$, alors le critère de non-appartenance ne peut être rempli, et $\mathcal{R} \in \mathsf{LFBO}(k)$. □

Nous pouvons maintenant démontrer que le problème de l'appartenance est décidable.

Théorème 3.85. *Le problème de l'appartenance est décidable pour la classe* $\mathsf{LFBO}(k)$*.*

Démonstration. D'après le corollaire 3.84, un système $\mathcal{R}$ appartient à $\mathsf{LFBO}(k)$ si et seulement si

$$({}_{\mathsf{bhbo}(k+\mathsf{d}-1)}{\circ\!\!\longrightarrow}^*_{\mathcal{R}})[\overline{\mathsf{L}}] \cap \mathcal{T} = \emptyset.$$

Si $\mathcal{R}$ est $\mathsf{LFBO}(k)$ alors,

$$({}_{\mathsf{bhbo}(k+\mathsf{d}-1)}{\circ\!\!\longrightarrow}^*_{\mathcal{R}})[\overline{\mathsf{L}}] \cap \mathcal{T} = ({}_{\mathsf{bo}(k+\mathsf{d}-1)}{\circ\!\!\longrightarrow}^*_{\mathcal{R}})[\overline{\mathsf{L}}] \cap \mathcal{T} = \emptyset.$$

Sinon, $\mathcal{R}$ n'est pas $\mathsf{LFBO}(k)$, $({}_{\mathsf{bhbo}(k+\mathsf{d}-1)}{\circ\!\!\longrightarrow}^*_{\mathcal{R}})[\overline{\mathsf{L}}] \cap \mathcal{T} \neq \emptyset$ et comme

$$({}_{\mathsf{bhbo}(k+\mathsf{d}-1)}{\circ\!\!\longrightarrow}^*_{\mathcal{R}})[\overline{\mathsf{L}}] \cap \mathcal{T} \subseteq ({}_{\mathsf{bo}(k+\mathsf{d}-1)}{\circ\!\!\longrightarrow}^*_{\mathcal{R}})[\overline{\mathsf{L}}] \cap \mathcal{T},$$

nous avons

$$({}_{\mathsf{bo}(k+\mathsf{d}-1)}{\circ\!\!\longrightarrow}^*_{\mathcal{R}})[\overline{\mathsf{L}}] \cap \mathcal{T} \neq \emptyset.$$

Nous avons donc l'équivalence suivante

$$\mathcal{R} \text{ est } \mathsf{LFBO}(k)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$({}_{\mathsf{bo}(k+\mathsf{d}-1)}{\circ\!\!\longrightarrow}^*_{\mathcal{R}})[\overline{\mathsf{L}}] \cap \mathcal{T} = \emptyset.$$

Soit $\mathcal{S}_{k+\mathsf{d}-1} \cup \mathcal{A}^{\leq k+\mathsf{d}-1}$ le système fabriqué pour simuler les dérivations $\mathsf{bo}(k + \mathsf{d} - 1)$ dans $\mathcal{R}$. Par définition de T, tout terme $\bar{t} \in \overline{\mathcal{T}}$ tel que $\mathsf{Top}_{k+\mathsf{d}-1}(\bar{t}) \in \mathsf{Top}_{k+\mathsf{d}-1}(\overline{\mathsf{L}})$ appartient à $\overline{\mathsf{L}}$. En utilisant le lemme de projection 3.52 page 59 et le lemme de relèvement 3.54 page 3.54, on obtient :

$$({}_{\mathsf{bo}(k+\mathsf{d}-1)}{\circ\!\!\longrightarrow}^*_{\mathcal{R}})[\overline{\mathsf{L}}] \cap \mathcal{T} = \emptyset \Leftrightarrow (\rightarrow^*_{\mathcal{S}_{k+\mathsf{d}-1}})[\mathsf{Top}_{k+\mathsf{d}-1}(\overline{\mathsf{L}})] \cap \mathcal{T} = \emptyset.$$

(C'est le même raisonnement que dans la preuve de la proposition 3.56 représenté par les figures 18 et 19 page 65.) Comme les systèmes clos i-préservent la reconnaissabilité, et comme $\mathsf{Top}_{k+\mathsf{d}-1}(\overline{\mathsf{L}}) \in \mathsf{Rec}(\mathcal{F}^{\leq k+\mathsf{d}-1} \cup \{q\})$ l'ensemble

$$(\rightarrow^*_{\mathcal{S} \cup \mathcal{A}^{\leq k+\mathsf{d}-1}})[\mathsf{Top}_{k+\mathsf{d}-1}(\overline{\mathsf{L}})] \cap \mathcal{T}$$

est reconnaissable, et la condition

$$(\rightarrow^*_{\mathcal{S} \cup \mathcal{A}^{\leq k+\mathsf{d}-1}})[\mathsf{Top}_{k+\mathsf{d}-1}(\overline{\mathsf{L}})] \cap \mathcal{T} = \emptyset$$

peut être testée. Nous pouvons décider si $\mathcal{R} \in \mathsf{LFBO}(k)$. □

3.12 Stratégies k-bornées et k-bottom-up

3.12.1 La stratégie Bottom-up(k)

Nous allons dans ce chapitre présenter la classe des **systèmes bottom-up($\boldsymbol{k}$)** ($\mathsf{BU}(k)$) qui sont à l'origine de ces travaux (voir [30] et [31]). L'idée de simuler les dérivations $\mathsf{bo}(k)$ par un système clos a aussi était reprise de la preuve d'i-préservation de la reconnaissabilité pour les systèmes $\mathsf{BU}(k)$. La principale différence étant que nous avons montré que l'on peut se réduire au cas $k = 0$. Dans la proposition 3.94 page 90, nous montrons que les classes $\mathsf{BU} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathsf{BU}(k)$ et LBO sont équivalentes. Nous en déduisons que le problème de l'appartenance est indécidable pour la classe $\mathsf{LBO}(0)$ en nous appuyant sur l'indécidabilité de l'appartenance à $\mathsf{BU}(0)$ démontrée dans [30] (section 3.12.3). Nous considérons toujours les termes marqués comme étant les éléments de $\overline{\mathcal{T}}(\mathcal{V})$. Nous allons devoir introduire une nouvelle forme de réécriture marquée. Pour cela, nous définissons pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'opération $\bullet n$ qui agit sur les termes marqués en modifiant uniquement leurs marques. Cette opération consiste à appliquer pour chaque symbole le maximum entre la marque présente sur ce symbole et n : pour tout terme $\overline{t} \in \overline{\mathcal{T}}(\mathcal{V})$, et tout entier $n \in \mathbb{N}$, le terme $\boldsymbol{\overline{t} \bullet n}$ est le seul terme qui vérifie :

— $(\overline{t} \bullet n)^0 = t$,

— Pour tout $u \in \mathcal{P}\mathsf{os}_{\mathcal{F}}(t)$,

$$\mathsf{m}(\overline{t} \bullet n/u) = \max(\mathsf{m}(\overline{t}/u), n).$$

Pour tout terme linéaire $\overline{t}$ nous définissons

$$M(\overline{t}, x) := \sup\{\mathsf{m}(\overline{t}/w) \mid w < \mathsf{pos}(\overline{t}, x)\} + 1. \tag{3.9}$$

Nous étendons cette notion aux substitutions ($\forall x \in \mathcal{V}, x\overline{\sigma} \bullet n = (x\overline{\sigma}) \bullet n$). Nous définissons alors un nouveau type de réécriture marquée $\bullet\!\!\to_{\mathcal{R}}$ par : pour tout terme $\overline{s}, \overline{t} \in \overline{\mathcal{T}}$,

$$\overline{s} \bullet\!\!\to_{\mathcal{R}} \overline{t} \tag{3.10}$$

s'il existe une position $v \in \mathcal{P}\mathsf{os}(s)$, une règle $l \to r \in \mathcal{R}$, et une substitution marquée $\overline{\sigma}$ telles que

$$\overline{s} = \overline{s}[\overline{l}\overline{\sigma}]_v, \overline{t} = \overline{s}[r\overline{\overline{\sigma}}]_v,$$

où $\boldsymbol{\overline{\overline{\sigma}}}$ est la substitution définie par : pour tout $x \in \mathcal{V}$,

$$x\overline{\overline{\sigma}} = x\overline{\sigma} \bullet M(\overline{l}, x). \tag{3.11}$$

(L'évolution des marques sur une branche lors d'un pas de réécriture marquée (pour $\bullet\!\!\to$) est représentée sur la figure 20 empruntée à [31]. Les marques sont représentées entre crochets [], et $M = M(\overline{l}, x)$. On a donc sur la figure $\mathsf{m}(x\overline{\overline{\sigma}}/w) = \max(\mathsf{m}(x\overline{\sigma}/w), M)$.)

Comme dans le cas de la réécriture $\mathsf{bo}(k)$, nous associons à chaque dérivation $d : s \to_{\mathcal{R}}^n t$ une unique dérivation marquée $\overline{d} : \overline{s} = s \bullet\!\!\to_{\mathcal{R}}^n \overline{t}$, en procédant exactement comme précédemment (mais en appliquant la réécriture marquée $\bullet\!\!\to$ au lieu de $\circ\!\!\to$). Nous pouvons maintenant introduire la notion de dérivation $\mathsf{bu}(k)$, et les classes de systèmes associées.

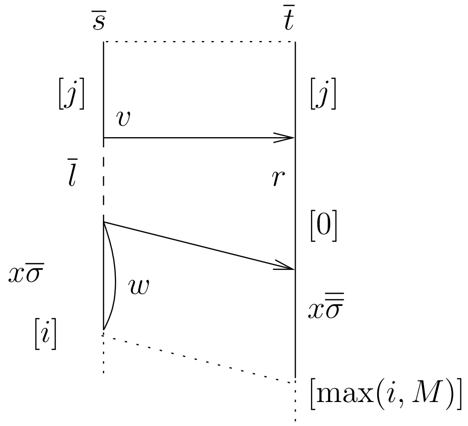

FIGURE 20 – Cas 3.1.

Définition 3.86 (La stratégie $\mathsf{bu}(k)$)**.** *Un pas de réécriture marqué*

$$\overline{s} \bullet\!\!\longrightarrow_{\mathcal{R},v,l\ \circ\!\to r,\overline{l}} \overline{t}$$

est $\mathsf{bu}(k)$ *si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

1. $l \notin \mathcal{V} \Rightarrow (\mathsf{mmax}(\overline{l}) \leq k$ *et* $\mathsf{m}(\overline{l}) = 0)$,
2. $l \in \mathcal{V} \Rightarrow \forall u \prec v, \mathsf{m}(\overline{s}/u) \leq 0.$

Une dérivation marquée est $\mathsf{bu}(k)$ *si tous les pas sont* $\mathsf{bu}(k)$*. Une dérivation est* $\mathsf{bu}(k)$ *si la dérivation marquée associée (en considérant* $\bullet\!\!\rightarrow$*) est* $\mathsf{bu}(k)$*. Un système est* $\mathsf{bu}(k)$ *si toute dérivation peut être transformée en dérivation* $\mathsf{bu}(k)$*. Nous notons* $\mathsf{BU}(k)$ *la classe des systèmes* $\mathsf{bu}(k)$ *et* $\mathsf{BU} := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathsf{BU}(k)$ *l'union de toutes ces classes.*

Nous utiliserons les notations habituelles associées à ces stratégies ($_{\mathsf{bu}(k)}\!\bullet\!\!\rightarrow^*_{\mathcal{R}}$, $_{\mathsf{bu}(k)}\!\rightarrow^*_{\mathcal{R}}$ ...). À partir de maintenant, et pour le reste de ce chapitre, $d : s \rightarrow^n_{\mathcal{R}} t$ désigne une dérivation dans $\mathcal{R}$ de longueur n, $\overline{d} : s \bullet\!\!\rightarrow^n_{\mathcal{R}} \overline{t}$ désigne la dérivation marquée associée à d en considérant $\bullet\!\!\rightarrow_{\mathcal{R}}$, et $\widetilde{d} : s \circ\!\!\rightarrow^n_{\mathcal{R}} \widetilde{t}$ désigne la dérivation associée à d en considérant $\circ\!\!\rightarrow_{\mathcal{R}}$. Ainsi nous avons la dérivation

$$d : s = s_0 \rightarrow_{l_0\rightarrow r_0, v_0, \sigma_0} s_1 \ldots \rightarrow_{l_{n-1}\rightarrow r_{n-1}, v_{n-1}, \sigma_{n-1}} t = s_n, \tag{3.12}$$

sa dérivation associée en considérant $\bullet\!\!\rightarrow_{\mathcal{R}}$

$$\overline{d} : s = s_0 \bullet\!\!\rightarrow_{l_0\rightarrow r_0, \overline{l_0}, v_0, \overline{\sigma_0}} s_1 \ldots \bullet\!\!\rightarrow_{l_{n-1}\rightarrow r_{n-1}, \overline{l_{n-1}}, v_{n-1}, \overline{\sigma_{n-1}}} \overline{t} = \overline{s_n}, \tag{3.13}$$

et la dérivation associée en considérant $\circ\!\!\rightarrow_{\mathcal{R}}$

$$\widetilde{d} : s = s_0 \circ\!\!\rightarrow_{l_0\rightarrow r_0, \widetilde{l_0}, v_0, \widetilde{\sigma_0}} s_1 \ldots \circ\!\!\rightarrow_{l_{n-1}\rightarrow r_{n-1}, \widetilde{l_{n-1}}, v_{n-1}, \widetilde{\sigma_{n-1}}} \widetilde{t} = \widetilde{s_n}. \tag{3.14}$$

Nous allons maintenant présenter des lemmes qui permettent de faire un lien entre les marques sur les termes de $\overline{d}$ et les marques sur les termes de $\widetilde{d}$. Ce sont ces lemmes qui nous permettront de démontrer l'équivalence entre BU et LBO.

Lemme 3.87. *Pour tout* $i \in \{0, \ldots, n\}$*, pour tout* $u \in \mathcal{P}\mathsf{os}(s_i)$*,*

$$\mathsf{m}(\widetilde{s_i}/u) = 0 \Leftrightarrow \mathsf{m}(\overline{s_i}/u) = 0.$$

Démonstration. Nous démontrons ce lemme par récurrence sur n la longueur de la dérivation d. Si $n = 0$, les marques sur s sont toutes à 0, et le résultat est vérifié. Soit $n > 0$. Par hypothèse de récurrence, pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, pour tout $u \in \mathcal{P}\mathsf{os}(s_{n-1})$,

$$\mathsf{m}(\widetilde{s_i}/u) = 0 \Leftrightarrow \mathsf{m}(\overline{s_i}/u) = 0.$$

Montrons que pour tout $u \in \mathcal{P}\mathsf{os}(s_n)$,

$$\mathsf{m}(\widetilde{s_n}/u) = 0 \Leftrightarrow \mathsf{m}(\overline{s_n}/u) = 0.$$

Soit $u \in \mathcal{P}\mathsf{os}(s_n)$. Nous distinguons trois cas.

— **cas 1 : $u \prec v_{n-1}$ ou $u \perp v_{n-1}$.**
Alors, $\mathsf{m}(\widetilde{s_n}/u) = \mathsf{m}(\widetilde{s_{n-1}}/u)$ et $\mathsf{m}(\overline{s_n}/u) = \mathsf{m}(\overline{s_{n-1}}/u)$. Par hypothèse de récurrence, le résultat est vérifié.

— **cas 2 : $\exists w \in \mathcal{P}\mathsf{os}_{\setminus\mathcal{V}}(r_{n-1})$ tel que $u = v_{n-1} \cdot w$.**
Alors, $\mathsf{m}(\widetilde{s_n}/u) = \mathsf{m}(\overline{s_n}/u) = \mathsf{m}(r_{n-1}/w) = 0$. Le résultat est vérifié.

— **cas 3 : $\exists x \in \mathcal{V}\mathsf{ar}(r_{n-1})$, $\exists w \in \mathcal{P}\mathsf{os}(x\sigma_{n-1})$ tels que $u = v_{n-1} \cdot \mathsf{pos}(r_{n-1}, x) \cdot w$.**
Alors, par définition de $\overline{\overline{\sigma_{n-1}}}$, $\mathsf{m}(\overline{s_n}/u) = \mathsf{m}(x\overline{\overline{\sigma_{n-1}}}/w) > 0$, et $\mathsf{m}(\widetilde{s_n}/u) = \mathsf{m}(x\widetilde{\sigma_{n-1}} \odot 1/w) > 0$. Le résultat est vérifié.

□

Le lemme précédent montre que si d est une dérivation bh, alors $\overline{d}$ satisfait les conditions de la définition de dérivation bh. Nous parlerons donc aussi de dérivation marquée bh dans le cas de $\bullet\!\!\rightarrow_{\mathcal{R}}$. La notion de dérivation bh a d'ailleurs était introduite dans [30], et reprise dans [32] (sous le nom de dérivation weakly bottom-up), et toute dérivation $\mathsf{bu}(k)$ est bh. Un système est **fortement bottom-up(k)** si toute dérivation bh est $\mathsf{bu}(k)$. Nous noterons **FBU(k)** la classe des systèmes fortement bottom-up k, et **FBU** l'union de toutes les classes $\mathsf{FBU}(k)$. Nous avons le corollaire suivant.

Corollaire 3.88. *Une dérivation est* $\mathsf{bu}(0)$ *si et seulement si elle est* $\mathsf{bo}(0)$*.*

Démonstration. La dérivation d est $\mathsf{bu}(0)$ si et seulement si la dérivation $\overline{d}$ vérifie : pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, $\overline{l_i} = l_i$. Et d est $\mathsf{bo}(0)$ si et seulement si la dérivation $\widetilde{d}$ vérifie : pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, $\widetilde{l_i} = l_i$. Nous pouvons conclure en utilisant le lemme 3.87. □

La preuve du prochain lemme peut être trouvée dans [30].

Lemme 3.89 ([30])**.** *Si d est* bh*, alors pour tout* $i \in \{0, \ldots, n\}$, $\forall u, v \in \mathcal{P}\mathsf{os}(s_i)$*,*

$$v \preceq u \Rightarrow \mathsf{m}(\overline{s_i}/v) \leq \mathsf{m}(\overline{s_i}/u).$$

Lemme 3.90. *Si d est* bh*, alors pour tout* $i \in \{0, \ldots, n\}$*, pour toutes positions* $u, v \in \mathcal{P}\mathsf{os}(s_i)$*, telles que* $v \preceq u$*, nous avons*

$$\mathsf{m}(\widetilde{s_i}/v) > 0 \Rightarrow \mathsf{m}(\widetilde{s_i}/u) - \mathsf{m}(\widetilde{s_i}/v) \geq |u| - |v|.$$

Démonstration. Nous démontrons ce résultat par récurrence sur n. Si $n = 0$, le résultat est vérifié. Soit $n > 0$. Soient $u, v \in \mathcal{P}\mathsf{os}(s_n)$ tels que $v \preceq u$. Nous devons montrer que

$$\mathsf{m}(\widetilde{s_n}/v) > 0 \Rightarrow \mathsf{m}(\widetilde{s_n}/u) - \mathsf{m}(\widetilde{s_n}/v) \geq |u| - |v|.$$

— **cas 1 : $u \prec v_{n-1}$.**
Puisque d est bh et comme $\overline{s_{n-1}}$ est fortement bien marqué pour k, $\mathsf{m}(\widetilde{s_{n-1}}/u) = \mathsf{m}(\widetilde{s_{n-1}}/v) = 0$. Le résultat est vérifié.

— **cas 2 : $u \perp v_{n-1}$.**
Alors, $v \perp v_{n-1}$, $\mathsf{m}(\widetilde{s_{n-1}}/v) = \mathsf{m}(\widetilde{s_n}/v)$, et $\mathsf{m}(\widetilde{s_{n-1}}/u) = \mathsf{m}(\widetilde{s_n}/u)$. Par hypothèse de récurrence, le résultat est vérifié.

— **cas 3 : $\exists w \in \mathcal{P}\mathsf{os}_{\backslash\mathcal{V}}(r_{n-1})$ tel que $u = v_{n-1} \cdot w$.**
Alors, comme $\widetilde{s_n}$ est fortement bien marqué pour k, et comme $\mathsf{mmax}(r) = 0$, pour tout $p \preceq u$, $\mathsf{m}(\widetilde{s_n}/p) = 0$. Nous avons donc

$$\mathsf{m}(\widetilde{s_n}/u) = \mathsf{m}(r_{n-1}/w) = \mathsf{m}(\widetilde{s_n}/v) = 0.$$

Le résultat est vérifié.

— **cas 4 : $\exists x \in \mathcal{V}\mathsf{ar}(r_{n-1})$, $\exists w \in \mathcal{P}\mathsf{os}(x\sigma_{n-1})$ tels que $u = v_{n-1} \cdot \mathsf{pos}(r_{n-1}, x) \cdot w$.**
Si $v \prec \mathsf{pos}(r_{n-1}, x)$, alors comme $\widetilde{s_n}$ est fortement bien marqué pour k, et comme $\mathsf{mmax}(r) = 0$,

$$\mathsf{mmax}(\overline{v}) = 0,$$

et le résultat est vérifié. Sinon, il existe $w_1 \in \mathcal{P}\mathsf{os}^{\preceq w}(x\sigma)$, $w_2 \in \mathcal{P}\mathsf{os}(x\sigma/w)$, tel que

$$v = v_{n-1} \cdot \mathsf{pos}(r_{n-1}, x) \cdot w_1 \text{ et } w = w_1 \cdot w_2.$$

Par définition,

$$\mathsf{m}(\widetilde{s_n}/v) = \max(\mathsf{m}(\widetilde{s_{n-1}}/v), |w_1| + 1),$$

et

$$\mathsf{m}(\widetilde{s_n}/u) = \max(\mathsf{m}(\widetilde{s_{n-1}}/u), |w| + 1) = \max(\mathsf{m}(\widetilde{s_{n-1}}/u), |w_1| + |w_2| + 1).$$

(Voir figure 21) Par hypothèse de récurrence,

$$\mathsf{m}(\widetilde{s_{n-1}}/u) - \mathsf{m}(\widetilde{s_{n-1}}/v) \geq |u| - |v|.$$

On a donc

$$\max(\mathsf{m}(\widetilde{s_n - 1}/u), |w|+1) - \mathsf{m}(\widetilde{s_{n-1}}/v) \geq \mathsf{m}(\widetilde{s_n - 1}/u)) - \mathsf{m}(\widetilde{s_{n-1}}/v) \geq |u| - |v|.$$

D'autre part,

$$\max(\mathsf{m}(\widetilde{s_n - 1}/u), |w|+1) - (|w_1|+1) \geq |w|+1-(|w_1|+1) = |w_2| = |u| - |v|.$$

On obtient

$$\begin{aligned} &\mathsf{m}(\widetilde{s_n}/u) - \mathsf{m}(\widetilde{s_n}/v) \\ &= \max(\mathsf{m}(\widetilde{s_n - 1}/u), |w| + 1) - \max(\mathsf{m}(\widetilde{s_{n-1}}/v), |w_1| + 1) \\ &\geq |u| - |v|, \end{aligned}$$

et le résultat est vérifié.

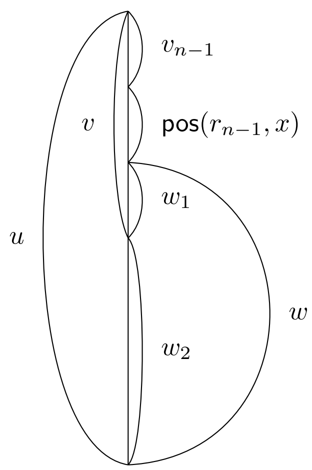

FIGURE 21 – Décomposition de u.

$\square$

Définition 3.91. *Soient $\bar{t} \in \overline{\mathcal{T}}$ et $v \in \mathcal{P}\mathsf{os}(t)$. Nous notons* $\mathbf{N}_{\boldsymbol{u}}(\bar{\boldsymbol{t}})$ *le nombre de position v qui précèdent strictement u et telles que $\mathsf{m}(\bar{t}/v) = \mathsf{m}(\bar{t}/u)$:*

$$\mathsf{N}_u(\bar{t}) := \mathsf{Card}(\{v \mid v \prec u, \mathsf{m}(\bar{t}/v) = \mathsf{m}(\bar{t}/u)\}).$$

Si d est bh, d'après le lemme 3.89, pour tous $i \in \{0, \dots, n\}$ $u \in \mathcal{P}\mathsf{os}(s_i)$, nous avons

$$\mathsf{N}_u(\overline{s_i}) = |u| - |v_u|,$$

où

$$v_u := \inf(\{v \mid v \preceq u, \mathsf{m}(\overline{s_i}/v) = \mathsf{m}(\overline{s_i}/u)\}).$$

Quand d est bh, le prochain lemme donne pour toute position $u \in \mathcal{P}\mathsf{os}(s_i)$ une borne à la marque $\mathsf{m}(\widetilde{s_i}/u)$ en fonction de la marque $\mathsf{m}(\overline{s_i}/u)$. Nous utiliserons ce lemme pour démontrer que tout système BU est LBO. Nous noterons d la profondeur maximale d'un membre gauche de $\mathcal{R}$

$$\mathsf{d} := \max(\{\,dpt(l) \mid l \in \mathsf{LHS}(\mathcal{R})\}).$$

On suppose que $\mathsf{d} > 1$ (en effet, sinon le système $\mathcal{R}$ est $\mathsf{LBO}(0)$ et il est aussi $\mathsf{BU}(0)$ (corollaire 3.88).

Lemme 3.92. *Si d est* bh*, alors pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, pour tout $u \in \mathcal{P}\mathsf{os}(s_i)$,*

$$\mathsf{m}(\widetilde{s_i}/u) \leq (\mathsf{m}(\overline{s_i}/u) - 1) \cdot (\mathsf{d} - 1) + \mathsf{N}_u(\overline{s_i}) + 1.$$

Démonstration. Nous démontrons ce résultat par récurrence sur n la longueur de la dérivation d. Si $n = 0$, le résultat est vérifié. Soit $n > 0$. Nous devons prouver que pour tout $u \in \mathcal{P}\mathsf{os}(s_n)$,

$$\mathsf{m}(\widetilde{s_n}/u) \leq (\mathsf{m}(\overline{s_n}/u) - 1) \cdot (\mathsf{d} - 1) + \mathsf{N}_u(\overline{s_n}) + 1.$$

Nous distinguons trois cas.

- cas 1 : $u \prec v_{n-1}$ où $u \perp v_{n-1}$.

Alors, pour tout $w \preceq u$,

$$\mathsf{m}(\overline{s_n}/w) = \mathsf{m}(\overline{s_{n-1}}/w),$$

et par définition de N_u,

$$\mathsf{N}_u(\overline{s_n}) = \mathsf{N}_u(\overline{s_{n-1}}).$$

Comme de plus

$$\mathsf{m}(\widetilde{s_n}/u) = \mathsf{m}(\widetilde{s_{n-1}}/u),$$

par hypothèse de récurrence le résultat est vérifié.

- cas 2 : $\exists w \in \mathcal{P}\mathsf{os}_{\backslash\mathcal{V}}(r_{n-1})$ tel que $u = v_{n-1} \cdot w$.

Alors,

$$\mathsf{m}(\widetilde{s_n}/u) = \mathsf{m}(\overline{s_n}/u) = \mathsf{m}(r_{n-1}/w) = 0,$$

et le résultat est vérifié (on suppose que $\mathsf{d} > 1$).

- cas 3 : $\exists x \in \mathcal{V}\mathsf{ar}(r_{n-1}), \exists w \in \mathcal{P}\mathsf{os}(x\sigma_{n-1})$ tels que $u = v_{n-1} \cdot \mathsf{pos}(r_{n-1}, x) \cdot w$.

Soit $u' = v_{n-1} \cdot \mathsf{pos}(l_{n-1}, x) \cdot w$. Par définition de $\odot 1$,

$$\mathsf{m}(\widetilde{s_n}/u) = \max(\mathsf{m}(\widetilde{s_{n-1}}/u'), |w| + 1). \tag{3.15}$$

Par définition de $\overline{\overline{\sigma_{n-1}}}$,

$$\begin{aligned}\mathsf{m}(\overline{s_n}/u) &= \mathsf{m}(x\overline{\overline{\sigma_{n-1}}}/w)\\ &= \mathsf{m}(x\overline{\sigma_{n-1}} \bullet M(\overline{l_{n-1}}, x)/w).\end{aligned}$$

Soit $M := \mathsf{m}(x\overline{\sigma_{n-1}} \bullet M(\overline{l_{n-1}}, x)/w)$. Par définition, pour tout $w_1 \in \mathcal{P}\mathsf{os}(x\sigma_{n-1})$,

$$\mathsf{m}(x\overline{\overline{\sigma_{n-1}}}/w_1) = \max(\mathsf{m}(\overline{s_{n-1}}/v_{n-1} \cdot \mathsf{pos}(l_{n-1}, x) \cdot w_1), M). \tag{3.16}$$

Si $l \notin \mathcal{V}$, alors comme le pas $\overline{s_{n-1}} \bullet\!\!\to_{\mathcal{R}}$ est bh, $\mathsf{m}(\overline{s_{n-1}}/v_{n-1}) = 0$, et d'après le lemme 3.89, pour tout $w_2 \preceq v_{n-1}$,

$$\mathsf{m}(\overline{s_{n-1}}/w_2) = 0.$$

Si $l \in \mathcal{V}$, alors par définition d'un pas bh, pour tout $w_2 \prec v_{n-1}$,

$$\mathsf{m}(\overline{s_{n-1}}/w_2) = 0$$

Dans les deux cas ($l \notin \mathcal{V}$ ou $l \in \mathcal{V}$), pour tout $w_2 \prec v_{n-1}$, $\mathsf{m}(\overline{s_{n-1}}/w_2) = \mathsf{m}(\overline{s_n}/w_2) = 0$. Ainsi,

$$\forall w_2 \prec v_{n-1} \cdot \mathsf{pos}(r_{n-1}, x), \mathsf{m}(\overline{s_n}/w_2) = \mathsf{m}(\widetilde{s_{n-1}}/w_2) = 0. \tag{3.17}$$

Soit

$$v := \inf\{w' \mid w' \preceq u', \mathsf{m}(\overline{s_n}/u) = \mathsf{m}(\overline{s_n}/w')\},$$

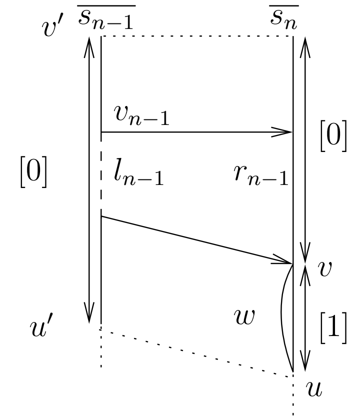

FIGURE 22 – Cas 3.1.

et soit

$$v' := \inf\{w' \mid w' \preceq u', \mathsf{m}(\overline{s_{n-1}}/u') = \mathsf{m}(\overline{s_{n-1}}/w')\}.$$

Nous avons

$$\mathsf{N}_u(\overline{s_n}) = |u| - |v| \text{ et } \mathsf{N}_{u'}(\overline{s_{n-1}}) = |u'| - |v'|.$$

Nous distinguons trois sous-cas.

— **cas 3.1 : $v' \prec v_{n-1}$ (figure 22).**

Puisque d est bh, et d'après le lemme 3.89, pour tout $w_2 \prec v_{n-1}$,

$$\mathsf{m}(\overline{s_{n-1}}/w_2) = \mathsf{m}(\overline{s_n}/w_2) = 0.$$

Nous avons donc $v' = \epsilon$. D'après l'équation 3.16, pour tout w_2 tel que $u \preceq w_2 \preceq v_{n-1} \cdot \mathsf{pos}(r_{n-1}, x)$,

$$\mathsf{m}(\overline{s_n}/w_2) = 1.$$

D'après 3.17,

$$\mathsf{m}(\overline{s_n}/\mathsf{father}(v_{n-1} \cdot \mathsf{pos}(r_{n-1}, x))) = 0,$$

et nous avons $v = v_{n-1} \cdot \mathsf{pos}(r_{n-1}, x)$. Donc,

$$\mathsf{N}_u(\overline{s_n}) = |u| - |v_{n-1} \cdot \mathsf{pos}(r_{n-1}, x)| = |w|.$$

De plus, puisque $\mathsf{m}(\overline{s_{n-1}}/u') = 0$, d'après le lemme 3.87, $\mathsf{m}(\widetilde{s_{n-1}}/u') = 0$, et d'après 3.15, $\mathsf{m}(\widetilde{s_n}/u) = |w| + 1$. On a donc,

$$\begin{aligned}
&\mathsf{m}(\overline{s_n}/u) = 1,\\
&\mathsf{m}(\widetilde{s_n}/u) = |w| + 1,\\
&\mathsf{N}_u(\overline{s_n}) = |w|.
\end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned}
\mathsf{m}(\widetilde{s_n}/u) &= \mathsf{m}(\overline{s_n}/u) + \mathsf{N}_u(\overline{s_n})\\
&\leq (\mathsf{m}(\overline{s_n}/u) - 1) \cdot (\mathsf{d} - 1) + \mathsf{N}_u(\overline{s_n}) + 1.
\end{aligned}$$

Le résultat est vérifié.

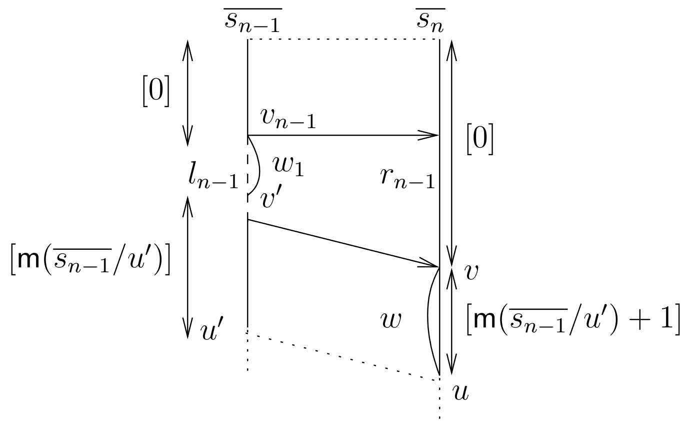

FIGURE 23 – Cas 3.2.

— **cas 3.2 : $\exists w_1 \in \mathcal{P}\mathsf{os}_{\backslash\mathcal{V}}(l_{n-1})$ tel que $v' = v_{n-1} \cdot w_1$ (figure 23).**

Puisque d est bh,

$$\mathsf{m}(\overline{l_{n-1}}) = \mathsf{m}(\overline{s_{n-1}}/v_{n-1}) = 0.$$

Par définition de v' et d'après le lemme 3.89, pour tout $w_2, u' \preceq w_2 \preceq v'$,

$$\mathsf{m}(\overline{s_{n-1}}/w_2) = \mathsf{m}(\overline{s_{n-1}}/u').$$

En particulier,

$$\mathsf{m}(\overline{s_{n-1}}/\mathsf{father}(v_{n-1} \cdot \mathsf{pos}(l_{n-1}, x))) = \mathsf{m}(\overline{s_{n-1}}/u').$$

Donc, d'après 3.16, pour tout $w_2, u \preceq w_2 \preceq v_{n-1} \cdot \mathsf{pos}(r_{n-1}, x)$,

$$\mathsf{m}(\overline{s_n}/w_2) = \mathsf{m}(\overline{s_{n-1}}/u') + 1,$$

et d'après 3.17, $\mathsf{m}(\overline{s_n}/\mathsf{father}(v_{n-1} \cdot \mathsf{pos}(r_{n-1}, x))) = 0$, et nous avons

$$v = v_{n-1} \cdot \mathsf{pos}(r_{n-1}, x).$$

Donc,

$$\mathsf{N}_u(\overline{s_n}) = |u| - |v_{n-1} \cdot \mathsf{pos}(r_{n-1}, x)| = |w|.$$

De plus, d'après le lemme 3.87, puisque $\mathsf{m}(\overline{s_{n-1}}/v') > 0$, nous avons $\mathsf{m}(\widetilde{s_{n-1}}/v') > 0$. D'après le lemme 3.90,

$$\mathsf{m}(\widetilde{s_{n-1}}/u') - \mathsf{m}(\widetilde{s_{n-1}}/v') \geq |u'| - |v'|.$$

Comme

$$|u'| - |v'| = |u| - |v| + |\mathsf{pos}(l_{n-1}, x)| - |w_1| > |u| - |v| = |w|,$$

on a

$$\mathsf{m}(\widetilde{s_{n-1}}/u') \geq |w| + 1.$$

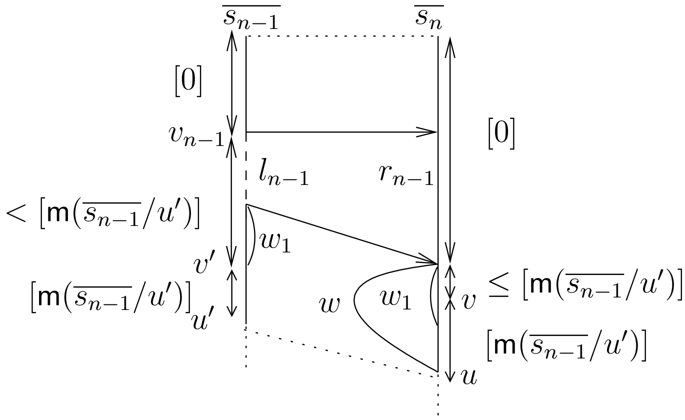

FIGURE 24 – Cas 3.3.

Et d'après l'équation 3.15,

$$\mathsf{m}(\widetilde{s_n}/u) = \mathsf{m}(\widetilde{s_{n-1}}/u').$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
&\mathsf{m}(\overline{s_n}/u) = \mathsf{m}(\overline{s_{n-1}}/u'), && (3.18)\\
&\mathsf{m}(\widetilde{s_n}/u) = \mathsf{m}(\widetilde{s_{n-1}}/u'), && (3.19)\\
&\text{et } \mathsf{N}_{u'}(\overline{s_{n-1}}) = |u'| - |v'| = \mathsf{N}_u(\overline{s_n}) + |\mathsf{pos}(l_{n-1}, x)| - |w_1|.
\end{aligned}$$

Comme de plus, $|\mathsf{pos}(l_{n-1}, x)| < \mathsf{d}$, $|\mathsf{pos}(l_{n-1}, x)| - |w_1| \leq \mathsf{d} - 1$, et

$$\mathsf{N}_{u'}(\overline{s_{n-1}}) = \mathsf{N}_u(\overline{s_n}) + |\mathsf{pos}(l_{n-1}, x)| - |w_1|. \tag{3.20}$$

Par hypothèse de récurrence,

$$\mathsf{m}(\widetilde{s_{n-1}}/u') \leq (\mathsf{m}(\overline{s_{n-1}}/u') - 1) \cdot (\mathsf{d} - 1) + \mathsf{N}_{u'}(\overline{s_{n-1}}) + 1.$$

En utilisant 3.18, 3.19, et 3.20, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\mathsf{m}(\widetilde{s_n}/u) &= \mathsf{m}(\widetilde{s_{n-1}}/u')\\
&\leq (\mathsf{m}(\overline{s_{n-1}}/u') - 1)(\mathsf{d} - 1) + \mathsf{N}_{u'}(\overline{s_{n-1}}) + 1\\
&\leq (\mathsf{m}(\overline{s_{n-1}}/u') - 1)(\mathsf{d} - 1) + \mathsf{N}_u(\overline{s_n}) + d\\
&= (\mathsf{m}(\overline{s_n}/u) - 1)(\mathsf{d} - 1) + \mathsf{N}_u(\overline{s_n}) + 1.
\end{aligned}$$

Le résultat est vérifié.

— **cas 3.3 : $\exists w_1 \in \mathcal{P}\mathbf{os}(x\sigma_{n-1})$ tel que $v' = v_{n-1} \cdot \mathbf{pos}(l_{n-1}, x) \cdot w_1$ (figure 24).**

Par définition de v',

$$\mathsf{mmax}(\overline{l_{n-1}}) < \mathsf{m}(\overline{s_{n-1}}/u').$$

D'après l'équation 3.16, et en utilisant 3.89, on a

$$\forall z \in \mathcal{P}\mathsf{os}^{\succeq w_1}(x\sigma_{n-1}),\ \mathsf{m}(\overline{s_n}/v_{n-1} \cdot \mathsf{pos}(r_{n-1}, x) \cdot z) \geq \mathsf{m}(\overline{s_{n-1}}/u').$$

Ainsi, par définition de v,

$$v \preceq v_{n-1} \cdot \mathsf{pos}(r_{n-1}, x) \cdot w_1.$$

De plus, d'après 3.17,

$$v \succeq v_{n-1} \cdot \mathsf{pos}(r_{n-1}, x),$$

et il existe $w_1' \preceq w_1$ tel que

$$v = v_{n-1} \cdot \mathsf{pos}(r_{n-1}, x) \cdot w_1'.$$

Puisque

$$\mathsf{N}_{u'}(\overline{s_{n-1}}) = |u'| - |v'| = |w| - |w_1| \text{ et } \mathsf{N}_u(\overline{s_n}) = |u| - |v| = |w| - |w_1'|,$$

nous avons

$$\mathsf{N}_u(\overline{s_n}) \geq \mathsf{N}_{u'}(\overline{s_{n-1}}). \tag{3.21}$$

Soit

$$z = v_{n-1} \cdot \mathsf{pos}(r_{n-1}, x) \cdot w_1.$$

D'après le lemme 3.87, comme $\mathsf{m}(\overline{s_n}/z) > 0$, $\mathsf{m}(\widetilde{s_n}/z) > 0$, et en utilisant le lemme 3.90, nous obtenons

$$\mathsf{m}(\widetilde{s_n}/u) - \mathsf{m}(\widetilde{s_n}/z) \geq |u| - |z|.$$

Par définition,

$$\mathsf{m}(\widetilde{s_n}/z) = \max(\mathsf{m}(\widetilde{s_{n-1}}/v'), |w_1| + 1) \geq |w_1| + 1.$$

En utilisant ces deux dernières inéquations nous avons

$$\begin{aligned}\mathsf{m}(\widetilde{s_n}/u) &\geq \mathsf{m}(\widetilde{s_n}/z) + |u| - |z| \\ &\geq |w_1| + 1 + |u| - |z| \geq |w_1| + 1,\end{aligned}$$

et d'après l'équation 3.16,

$$\mathsf{m}(\widetilde{s_n}/u) = \mathsf{m}(\widetilde{s_{n-1}}/u'). \tag{3.22}$$

De plus, par définition

$$\mathsf{m}(\overline{s_n}/u) = m(x\overline{\overline{\overline{\sigma_{n-1}}}}/w_1) \geq \mathsf{m}(\overline{s_{n-1}}/u') = \mathsf{m}(x\overline{\sigma_{n-1}}/w_1). \tag{3.23}$$

Par hypothèse de récurrence,

$$\mathsf{m}(\widetilde{s_{n-1}}/u') \leq (\mathsf{m}(\overline{s_{n-1}}/u') - 1) \cdot (\mathsf{d} - 1) + \mathsf{N}_{u'}(\overline{s_{n-1}}) + 1. \tag{3.24}$$

Ainsi, en utilisant 3.21, 3.22, 3.23, et 3.24 on obtient

$$\begin{aligned}&\mathsf{m}(\widetilde{s_n}/u) = \mathsf{m}(\widetilde{s_{n-1}}/u') \\ &\leq (\mathsf{m}(\overline{s_{n-1}}/u') - 1) \cdot (\mathsf{d} - 1) + \mathsf{N}_{u'}(\overline{s_{n-1}}) + 1 \\ &\leq (\mathsf{m}(\overline{s_n}/u) - 1) \cdot \mathsf{d} + \mathsf{N}_u(\overline{s_n}) + 1.\end{aligned}$$

Le résultat est vérifié.

□

3.12.2 Équivalence entre bo et bu

Nous allons maintenant démontrer l'équivalence entre les classes LBO et BU.

Lemme 3.93. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, toute dérivation qui est $\mathsf{bu}(k)$ est $\mathsf{bo}(0)$ si $\mathsf{d} \leq 1$ et elle est $\mathsf{bo}(k(\mathsf{d}-1))$ si $\mathsf{d} > 1$.*

Démonstration. Soit $\mathsf{d} \leq 1$ et d une dérivation $\mathsf{bu}(k)$ dans $\mathcal{R}$. D'après la remarque 3.82, $\mathcal{R}$ est $\mathsf{LFBO}(0)$. Cela signifie que toute dérivation bh est $\mathsf{bo}(0)$. En particulier, d est $\mathsf{bo}(0)$. Le résultat est vérifié lorsque $\mathsf{d} \leq 1$. Soit $\mathsf{d} > 1$. Soit d une dérivation $\mathsf{bu}k$,

$$\overline{d}: \; s_0 \;{}_{\mathsf{bu}(k)}\!\!\bullet\!\!\!\longrightarrow_{\mathcal{R},v_0,l_0\to r_0,\overline{l_0}} \overline{s_1} \cdots \;{}_{\mathsf{bu}(k)}\!\!\bullet\!\!\!\longrightarrow_{\mathcal{R},v_{n-1},l_{n-1}\to r_{n-1},\overline{l_{n-1}}} \cdots s_n,$$

la dérivation marquée associée en considérant $\bullet\!\!\!\longrightarrow$, et

$$\widetilde{d}: \; s_0 \;{}_{\mathsf{bo}(k)}\!\circ\!\!\!\longrightarrow_{\mathcal{R},v_0,l_0\to r_0,\widetilde{l_0}} \widetilde{s_1} \cdots \;{}_{\mathsf{bo}(k)}\!\circ\!\!\!\longrightarrow_{\mathcal{R},v_{n-1},l_{n-1}\to r_{n-1},\widetilde{l_{n-1}}} \cdots s_n,$$

la dérivation marquée associée en considérant $\circ\!\!\!\longrightarrow$. Montrons que chaque pas de $\widetilde{d}$ est $\mathsf{bo}(k \cdot (\mathsf{d}-1))$. Soit $i \in \{0, \ldots, n\}$. Si $l_i \in \mathcal{V}$ ou si $dpt(l_i) = 1$, alors le pas est $\mathsf{bo}(0)$, et le résultat est vérifié. Supposons donc que $l_i \notin \mathcal{V} \cup \mathcal{T}(\mathcal{F}_0, \mathcal{V})$, et donc que $dpt_{\setminus\mathcal{V}}(l_i) > 1$. Soit $u \in \mathcal{P}\mathsf{os}_{\setminus\mathcal{V}}(l_i)$. Si $\mathsf{m}(\overline{l_i}/u) = 0$, d'après le lemme 3.87 page 82, $\mathsf{m}(\widetilde{l_i}/u) = 0$. Sinon, $\mathsf{m}(\overline{l_i}/u) > 0$. Puisque d est bh, $\mathsf{m}(\overline{l_i}) = 0$. D'après le lemme 3.92, puisque $\mathsf{m}(\overline{l_i}/u) \leq k$, nous avons

$$\mathsf{m}(\widetilde{l_i}/u) \leq (k-1) \cdot (\mathsf{d}-1) + \mathsf{N}_{v_i \cdot u}(\overline{s_i}) + 1.$$

Par définition de $\mathsf{N}_{v_i \cdot u}(\overline{s_i})$ et de d, et puisque $\mathsf{m}(\overline{l_i}/u) > 0$, nous avons $\mathsf{m}(\overline{l_i}) = 0$, et $\mathsf{N}_{v_i \cdot u}(\overline{s_i}) < \mathsf{d} - 1$. Donc,

$$(k-1) \cdot (\mathsf{d}-1) + \mathsf{N}_{v_i \cdot u}(\overline{s_i}) + 1 \leq (k-1) \cdot (\mathsf{d}-1) + \mathsf{d} - 2 + 1 = k \cdot (\mathsf{d}-1).$$

Ainsi, $\mathsf{m}(\widetilde{l_i}/u) \leq k \cdot (\mathsf{d}-1)$, et $\mathsf{mmax}(\widetilde{l_i}) \leq k \cdot (\mathsf{d}-1)$. La dérivation d est $\mathsf{bo}(k \cdot (\mathsf{d}-1))$. □

Proposition 3.94. *Nous avons les résultats suivants*

1. *si $\mathcal{R}$ est $\mathsf{BU}(k)$, alors $\mathcal{R}$ est $\mathsf{LBO}(\max(0, k \cdot (\mathsf{d}-1)))$,*
2. *si $\mathcal{R}$ est $\mathsf{FBU}(k)$ alors $\mathcal{R}$ est $\mathsf{LFBO}(\max(k \cdot (\mathsf{d}-1)))$,*
3. *si $\mathcal{R}$ est $\mathsf{LBO}(k)$, alors nous pouvons fabriquer un SRT $\mathcal{R}' \in \mathsf{BU}(0)$ tel que $\to^*_{\mathcal{R}} = \to_{\mathcal{R}'}$.*

Démonstration. (1) Si $\mathcal{R}$ est $\mathsf{BU}(k)$, d'après le lemme 3.93, $\mathcal{R}$ est $\mathsf{LBO}(\max(0, k \cdot (\mathsf{d}-1))$.
(2) Si toute dérivation bh dans $\mathcal{R}$ est $\mathsf{bu}(k)$, alors d'après le lemme 3.93, toute dérivation bh est $\mathsf{bo}(\max(0, k \cdot (\mathsf{d}-1))$, et $\mathcal{R} \in \mathsf{LFBO}(\max(0, k \cdot (\mathsf{d}-1))$.
(3) C'est une conséquence directe de la proposition 3.48 et du corollaire 3.88. □

3.12.3 Indécidabilité de l'appartenance à $\mathsf{LBO}(0)$

Ce résultat est une conséquence directe de l'équivalence entre LBO et BU. En effet, nous savons que le problème de l'appartenance à la classe $\mathsf{BU}(0)$ est indécidable [31]. La proposition 3.94 nous permet de conclure que le problème de l'appartenance à $\mathsf{LBO}(0)$ est indécidable.

3.13 Systèmes appartenant à LFBO

Les systèmes de la classe LFBO contiennent de nombreux systèmes étudiés auparavant et pour lesquels l'i-préservation de la reconnaissabilité était connue. Parmi celles-ci, il y a les systèmes de réécriture de mots inverses basiques à gauche de Sakarovitch [76] (vus comme des systèmes de réécriture de termes), les systèmes growing linéaires de Jacquemard [59], les systèmes linéaires inverses semi-monadiques généralisés [53] de Gyenizese et Vágvölgyi, et la classe la plus large contenant toutes ces classes (à l'exception de la classe BU) : la classe des systèmes linéaires inverse-Finite-Path-Overlaping [85] ($i-\mathsf{LFPO}$) de Takai, Kaji et Seki. Nous avons déjà démontré 3.94 que $\mathsf{LFBO} = \mathsf{FBU}$. Comme $i-\mathsf{LFPO} \subset \mathsf{FBU}$ [31], nous savons déjà que $i-\mathsf{LFPO} \subset \mathsf{LFBO}$. Nous allons tout de même présenter la classe $i-\mathsf{LFPO}$ et expliquer, sans détails, comment démontrer que $i-\mathsf{LFPO} \subset \mathsf{LFBO}$. Pour définir les systèmes $i-\mathsf{LFPO}$, nous avons besoin d'introduire le "sticking-out graph" associé à un système de réécriture (nous utiliserons la définition utilisée dans [31] qui diffère légèrement de celle donnée dans [85]). Le sticking-out graph associé à un système $\mathcal{R}$ est un graphe orienté dont les noeuds sont les règles. Deux noeuds sont reliés par un arc s'il peut exister un certain type d'enchevêtrement pour les règles. Sur chaque arc est indiqué un coût, 0 où 1.

Définition 3.95. *Soit $s \in \mathcal{T}(\mathcal{V})$, $t \in \mathcal{T}(\mathcal{V}) \setminus \mathcal{V}$ et $w \in \mathcal{P}\mathsf{os}_{\mathcal{V}}(t)$. Le terme s* **dépasse du terme** *t en w si*

1. *$\forall v \in \mathcal{P}\mathsf{os}(t)$ tel que $\varepsilon \preceq v \prec w$, $v \in \mathcal{P}\mathsf{os}(s)$ et $\mathsf{root}(s/v) = \mathsf{root}(t/v)$.*
2. *$w \in \mathcal{P}\mathsf{os}(s)$ et $s/w \notin \mathcal{T}$ (i.e. le terme s/w a des variables).*

Si de plus $s/w \notin \mathcal{V}$ alors s dépasse strictement *t en w.*

Définition 3.96. *Soit $\mathcal{R} = \{l_1 \to r_1, \ldots, l_n \to r_n\}$ un système de réécriture. Le* **sticking-out graph** *est le graphe orienté $\mathsf{SG}(\mathcal{R}) = (V, E)$ où $V = \{1, \ldots, n\}$ et E est défini par :*

a) *si l_j dépasse strictement un sous-terme de r_i en w, $i \overset{(a)}{\to} j \in E$;*

b) *si un sous-terme propre de l_j dépasse stricement r_i en w, $i \overset{(b)}{\to} j \in E$;*

c) *si un sous-terme de r_i dépasse l_j en w, $i \overset{(c)}{\to} j \in E$;*

d) *si r_i dépasse un sous-terme propre de l_j en w, $i \overset{(d)}{\to} j \in E$.*

La figure 25 (reprise de [31]) montre les quatre possibilités $(a), (b), (c), (d)$. Le **poids** de chaque arc de $\mathsf{SG}(\mathcal{R})$ est défini par :

— (a) et (b) ont pour poids 1,

— (c) or (d) ont pour poids 0.

Le **poids d'un chemin** est la somme du poids de tous ses arcs. Le **poids d'un graphe** est le poids maximal d'un de ses chemins. Il est infini si le graphe contient un cycle avec un arc de poids 1. Un système est $\boldsymbol{i-\mathsf{LFPO}}$ si son sticking-out graph ne contient pas de cycle ayant une arrête de poids 1. Intuitivement, dans une dérivation bh, enchaîner des règles reliées par un arc de type (c) ou (d) ne "coûte" jamais rien : si la dérivation est $\mathsf{bo}(k)$ avant l'application de ces règles, elle reste $\mathsf{bo}(k)$ après. Par contre, dans une dérivation bh, l'enchaînement de règles reliées par un arc de type (a) ou (b) peut avoir un coût : si la dérivation est

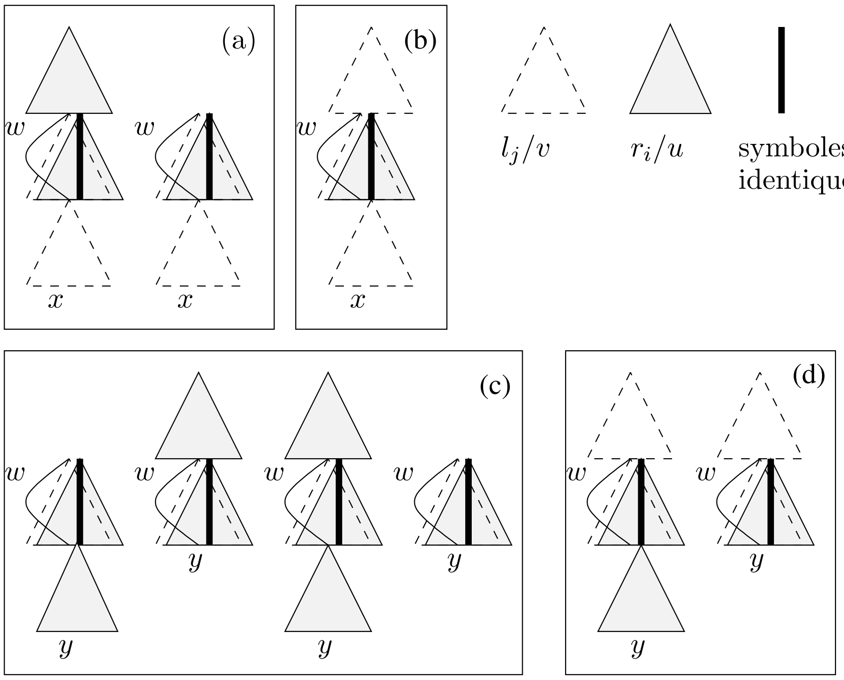

FIGURE 25 – Les quatre possibilités.

$\mathsf{bo}(k)$ après l'application de la première règle, elle est (au plus) $\mathsf{bo}(k+(\mathsf{d}(\mathcal{R})-1))$ (où $\mathsf{d}(\mathcal{R})$ est défini page 77) après l'application de la deuxième règle.

Nous avons donc le résultat suivant.

Proposition 3.97 ([31]). *Soit $\mathcal{R}$ un système linéaire. Si le poids de $\mathsf{SG}(\mathcal{R})$ est borné, alors $\mathcal{R} \in \mathsf{LFBO}$.*

Corollaire 3.98. *Les systèmes $i-\mathsf{LFPO}$ sont inclus strictement dans la classe LFBO.*

Démonstration. Par définition, le sticking out graph associé à un système $i-\mathsf{LFPO}$ ne contient pas de cycle ayant une arrête de poids 1. La proposition 3.97 permet de conclure. Pour montrer que l'inclusion est stricte, on peut remarquer que le sticking out graph du système $\{\mathsf{f}(\mathsf{g}(x), \mathsf{a}) \to \mathsf{f}(x, \mathsf{b})\}$ contient une boucle de type (a) et donc un cycle de poids 1. Nous pouvons facilement démontrer que le système est dans LFBO par une preuve ad hoc. □

3.14 Les systèmes Match-bounded et la classe LFBO

Il y a une classe de systèmes de réécriture de mots qui a elle aussi été introduite en utilisant un système de marquage, qui i-préserve la reconnaissabilité, et qui est orthogonale à LBO : la classe des systèmes inverses match-bounded [42]. La définition que nous présentons ici des systèmes match-bounded ne diffère de celle présentée dans [42] que par les notations que nous utilisons. Étant donné un système de réécriture de mots M, on note

$$match(M) = \{\bar{l} \to r^{\mathsf{mmin}(\bar{l})+1} \mid l \to r \in M\}$$

(Rappelons que l'opération min renvoie la marque minimale présente sur un terme, à l'exception des marques sur les variables, voir définition 2.4 page 15. Nous considérons les mots comme des termes pour le marquage.) Par exemple, pour le système $\mathcal{R}_8 = \{\mathsf{f}(\mathsf{i}(x)) \to \mathsf{i}(\mathsf{f}(x))\}$ (nous utilisons les symboles unaires introduits dans les exemples qui précèdent et qui représentent des systèmes de réécriture de mots, voir section 2.10),

$$match(\mathcal{R}_8) = \{\mathsf{f}(\mathsf{i}(x)) \to \mathsf{i}^1(\mathsf{f}^1(x)), \mathsf{f}(\mathsf{i}^1(x)) \to \mathsf{i}^1(\mathsf{f}^1(x)), \mathsf{f}^1(\mathsf{i}(x)) \to \mathsf{i}^1(\mathsf{f}^1(x)),$$
$$\mathsf{f}^1(\mathsf{f}^1(x)) \to \mathsf{i}^1(\mathsf{f}^1(x)), \dots\}$$

Définition 3.99 ([42])**.** *Un système de réécriture de mots M sur A est* **match-bounded** *pour $L \subseteq A^*$ par $c \in \mathbb{N}$ si $\epsilon \notin \mathsf{LHS}(M)$ et*

$$\overline{s} \in [L](\to^*_{match(M)}) \Rightarrow \mathsf{mmax}(\overline{s}) \leq c.$$

Il est match-bounded pour $L \subseteq A^*$ s'il existe c tel que M soit match-bounded par c pour L. Il est match-bounded s'il est match-bounded pour A^*

La notion de système match-bounded étend celle de système deleting et certaines preuves présentées dans [42] utilisent les propriétés des systèmes deleting. Les systèmes déleting ont été introduits dans [54]. Il est démontré dans [56] qu'ils préservent la reconnaissabilité et u-terminent. Un système de réécriture de mots M est **deleting** pour un ordre partiel irréflexif $>$ sur A si $\epsilon \notin \mathsf{LHS}(M)$ et si pour chaque règle $l \to r \in M$, et chaque lettre a de r, il existe une lettre b de l telle que $b > a$. Un système M est deleting s'il existe un tel ordre partiel irréflexif $>$ pour lequel il est deleting. Le système

$$match_c(M) = \{\bar{l} \to \overline{r} \in match(M) \mid \ \mathsf{mmax}(\bar{l}) \leq c,\ \mathsf{mmax}(\overline{r}) \leq c\}$$

est un système deleting, et par conséquent si M est match-bounded pour un ensemble reconnaissable T, alors $[T](\to^*_M)$ est reconnaissable. De plus, toujours dans le même article, il est démontré que pour un c donné, le problème de savoir si un système M est match-bounded pour L par c est décidable. Il est aussi démontré que tout système deleting est match-bounded. Cette classe de systèmes est orthogonale à la classe LBO. En effet, les systèmes inverses match-bounded (iMB) u-i-terminent. Or nous avons vu dans l'exemple 3.41 page 49 que le système $\mathcal{R}_0 = \{\mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) \to \mathsf{f}(x)\}$ qui est $\mathsf{LBO}(0)$ ne i-$\mathsf{bo}(0)$-termine pas sur f, et il n'est donc pas iMB pour f (on peut d'ailleurs le vérifier "à la main"). Le système $\mathcal{R}_0$ est bien équivalent à un système de réécriture de mots. Cela montre que $\mathsf{iMB} \not\subset \mathsf{LFBO}$. Pour montrer que les classes sont orthogonales, il suffit de remarquer que le système $\{\mathsf{f}(\mathsf{i}(x)) \to \mathsf{g}(\mathsf{f}(x))\}$ est un système iMB (par 1), alors qu'il n'appartient pas à LFBO (on peut fabriquer pour tout $k \in \mathbb{N}$ des dérivations $\mathsf{bo}(k)$ qui ne sont pas $\mathsf{bo}(k-1)$ pour tout k en procédant comme dans l'exemple 3.33 page 47 avec le système $\mathcal{R}_5$). Il serait sans doute intéressant de mener un travail de recherche pour voir s'il possible de relier ces deux classes.

3.15 Perspectives de recherche

Nous avons déjà évoqué les systèmes inverses match-bounded, et signalé qu'il pourrait être intéressant de voir s'il n'y a pas un moyen de définir une nouvelle classe, qui engloberait les deux, ou une classe incluant, entre autres, une partie des systèmes inverse-growing et des systèmes inverses-match bounded. Il serait aussi intéressant de démontrer que l'appartenance à $\mathsf{LBO}(k)$ est indécidable pour tout k.
Nous conjecturons que l'appartenance à LFBO est décidable. Cela est sans doute démontrable en montrant qu'il existe pour tout système $\mathcal{R}$ une constante c (nous présentons qu'elle dépendant uniquement de la profondeur maximale du membre gauche d'une règle et du nombre de règles) telle que $\mathcal{R} \in \mathsf{LBO}$ si et seulement $\mathcal{R} \in \mathsf{LBO}(k \cdot \mathsf{c})$. Une autre perspective de recherche concerne l'extension des résultats d'u-terminaison et de i-u-terminaison pour la classe des systèmes $\mathsf{LBO}(k)$. En effet, nous avons montré que ces problèmes étaient décidables pour la classe $\mathsf{LFBO}(k)$, mais nous ne l'avons pas démontré pour la classe des systèmes $\mathsf{LBO}(k)$. Ceci est lié au fait qu'un système $\mathsf{bo}(k)$ qui n'admet pas de dérivations infinies contenant une infinité de termes u-termine si et seulement s'il n'existe pas de cycle de la forme $s \rightarrow^+_{\mathcal{R}} s$. Dans le cas des mots, il semblerait que si le système est $\mathsf{bo}(k)$ alors de tels cycles sont reconnaissables par un automate à délai borné (automate introduit dans [38]). Nous n'avons pas pour l'instant envisagé de solution pour le cas plus général des systèmes linéaires.

Nous l'avons déjà évoqué dans l'introduction, mais il serait aussi intéressant d'utiliser les résultats d'i-préservation de la reconnaissabilité dans le cadre de l'analyse de protocoles cryptographique, en suivant par exemple la méthode de Genet et Klay. Bien d'autres applications sont sans doute possibles, et restent à trouver.

Chapitre 4

Les mots : la stratégie $\mathsf{bo}(k)$ préserve l'algébricité

4.1 Présentation du chapitre

Dans ce chapitre, nous démontrons que l'image directe par la stratégie $\mathsf{bo}(k)$ d'un langage algébrique est un langage algébrique, et donc que les systèmes de réécriture de mots $\mathsf{LBO}(k)$ préservent l'algébricité. Nous montrerons aussi que la stratégie $\mathsf{bo}(k)$ préserve les langages indexés. Nous allons pour cela définir une grammaire algébrique qui simule les dérivations $\mathsf{bo}(0)$ (il est en effet possible de se ramener au cas $k = 0$ en utilisant la proposition 3.48 page 56). Nous notons M un système de réécriture de mots. Nous supposerons de plus que $\epsilon \notin \mathsf{LHS}(M) \cup \mathsf{RHS}(M)$. Il ne s'agit pas d'une restriction. Il est toujours possible de se ramener à un système qui vérifie $\epsilon \notin \mathsf{LHS}(M)$. En effet, considérons le système M' sur $A' = A \cup \{\#\}$ (avec $\# \notin A$) contenant les règles

$$\{l \to r \in M \mid l \neq \epsilon, r \neq \epsilon\} \cup \{m \cdot l \to m \cdot r \mid l \to r \in M, l = \epsilon \text{ ou } r = \epsilon, m \in A'\}$$

Il est facile de vérifier que pour tous mots $\overline{s}, \overline{t} \in (A^{\mathbb{N}})^*$,

$$\overline{s} \ {}_{\mathsf{bo}(0)}\!\circ\!\!\longrightarrow_M \overline{t} \Leftrightarrow \# \cdot \overline{s} \ {}_{\mathsf{bo}(0)}\!\circ\!\!\longrightarrow_{M'} \# \cdot \overline{t}.$$

Pour le restant de ce chapitre, M désigne donc un système sur un alphabet A tel que $\epsilon \notin \mathsf{LHS}(M) \cup \mathsf{RHS}(M)$.
Les dérivations $\mathsf{bo}(0)$ ont une forme très particulière. En effet, si une dérivation

$$s = s_0 \ {}_{\mathsf{bo}(0)}\!\!\longrightarrow^n_M s_n = t$$

est $\mathsf{bo}(0)$, alors dans la dérivation marquée associée les pas de réécriture sont de la forme

$$s_i = u_i \cdot l_i \cdot \overline{v_i} \ {}_{\mathsf{bo}(k)}\!\circ\!\!\longrightarrow_{l_i \to r_i} s_{i+1} = u_i \cdot r_i \cdot (\overline{v_i} \odot 1),$$

où u_i, l_i, r_i ne sont pas marqués. Remarquons que par définition de $\odot 1$, toutes les marques dans $\overline{v_i} \odot 1$ sont strictement supérieures à 0. Cette partie ne pourra donc pas être réécrite dans la suite de la dérivation, et tous les autres mots s_j, $j \in \{i+1, \ldots, n\}$, ont pour suffixe v_i. Seule la partie située au-dessus pourra être réécrite par la suite, c'est-à-dire uniquement des facteurs de $u_i \cdot r_i$. C'est cette propriété qui va nous permettre de simuler les dérivations $\mathsf{bo}(0)$ en utilisant une grammaire algébrique Gr. Nous commencerons par définir l'ensemble des non-terminaux N associé à cette grammaire Gr. Cet ensemble est constitué des non-terminaux $\langle \alpha, g, \beta \rangle$ pour tous α, g et β tels que :

— $\alpha, \beta \in (\mathsf{Prefix}_+(\mathsf{RHS}(M)))^* \cap \mathsf{Suffix}(\mathsf{LHS}(M))$,

— $g \in (\mathsf{Prefix}(\mathsf{LHS}(M)) \cup \mathsf{RHS}(M) \cup A) \backslash \{\epsilon\}$,

— $\beta \neq \epsilon \Rightarrow g \cdot \beta \in \mathsf{LHS}(M)$.

(Pour un ensemble T, $\mathsf{Prefix}_+(T)$ désigne l'ensemble des préfixes de mots de T, privé de ϵ.)

Nous définirons ensuite les règles de Gr de telle sorte qu'un non-terminal $\langle \alpha, g, \beta \rangle \in N$ engendre l'ensemble des mots

$$\{f \in A^* \mid g \cdot \beta \ {}_{\mathsf{bo}(0)}{\circ\!\!\longrightarrow}_M^* \ \alpha \cdot \overline{f}\}. \tag{4.1}$$

Nous démontrerons que Gr simule les dérivations $\mathsf{bo}(0)$ dans M, i.e. pour tous mots $s, t \in \mathcal{T}$, il existe une dérivation

$$s = s_0 \ {}_{\mathsf{bo}(0)}{\circ\!\!\longrightarrow}_{M,v_0} \ \overline{s_1} \ {}_{\mathsf{bo}(0)}{\longrightarrow}_{M,v_1} \ \cdots \ {}_{\mathsf{bo}(0)}{\circ\!\!\longrightarrow}_{M,v_{n-1}} \ \overline{t}$$

si et seulement s'il existe un mot $d \in N^*$ appelé **découpage de s** (nous introduirons formellement cette notion dans la section suivante) tel que

$$d \rightarrow_{\mathsf{Gr}}^* t.$$

(Nous verrons par la suite que lorsqu'un ensemble T est un langage algébrique (respectivement indexé), l'ensemble $\mathsf{Dec}(T)$ des mots qui sont des découpages de mots de T est aussi un langage algébrique (resp. indexé). Cette propriété de simulation suffit donc à démontrer la préservation des langages algébrique (resp. indexés) par les systèmes de réécritures de mots $\mathsf{LBO}(k)$. Elle assure aussi de l'inverse-préservation de la reconnaissabilité, résultat déjà obtenu par une autre méthode dans le chapitre 3 pour les systèmes de réécritures de termes linéaires, et qui sera étendu dans le prochain chapitre aux systèmes linéaires à gauche.)

Le découpage d de s est obtenu à partir de la décomposition de la dérivation

$$s \ {}_{\mathsf{bo}(0)}{\circ\!\!\longrightarrow}_M^* \ \overline{t}$$

en blocs. Voyons comment décomposer la dérivation et caractériser les blocs. Un bloc est constitué d'un ensemble de pas de réécriture qui se suivent. Les blocs recouvrent l'ensemble de la dérivation, et si un bloc va de s_i à s_{i+j}, alors le prochain bloc démarre de s_{i+j}.

Rappelons que nous supposons que les pas de réécriture sont de la forme

$$s_i = u_i \cdot l_i \cdot \overline{v_i} \ {}_{\mathsf{bo}(k)}{\circ\!\!\longrightarrow}_{l_i \to r_i} \ s_{i+1} = u_i \cdot r_i \cdot (\overline{v_i} \odot 1).$$

Pour effectuer la décomposition en blocs de $s \ {}_{\mathsf{bo}(0)}{\circ\!\!\longrightarrow}_M^* \ \overline{t}$, il suffit de suivre la procédure suivante : le premier bloc va de s_0 à s_{j_1}, où j_1 est le plus petit indice supérieur à 0 et tel que $u_{j_1} \prec u_0$. Le deuxième bloc va de i_{j_i} à i_{j_2}, où $j_2 > j_1$ est le plus petit indice tel que $u_{j_2} \prec u_{j_1}$, et ainsi de suite... On associe à chaque bloc 5 mots qui le caractérise. Le i-ème bloc ($i > 1$) obtenu lors de la décomposition est caractérisé par :

— un facteur g_i de s qui va être réécrit,

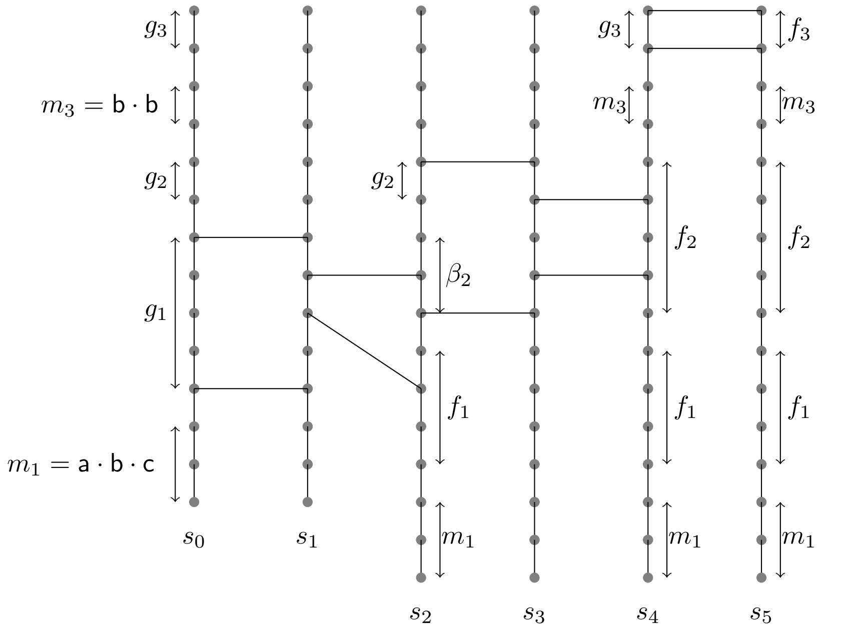

FIGURE 26 – Une dérivation $\mathsf{bo}(0)$ découpée en blocs.

— un mot β_i qui lui a été fourni par le $i-1$-ème bloc et qui va être réécrit,

— un mot β_{i+1} qu'il va fournir au $i+1$-ème bloc,

— un facteur f_i de t que le bloc va produire à partir de $g_i \cdot \beta_i \in M$,

— et un facteur m_i de s qui ne sera pas modifié durant la réécriture (le mot $f_i \cdot m_i$ est un facteur de t).

Par exemple, pour la dérivation représentée par la figure 26, le premier bloc va de s_0 à s_2. Le deuxième de s_2 à s_4, et le troisième de s_4 à s_5. Nous avons indiqué sur le dessin les mots caractérisant ces blocs.

— Le premier bloc réécrit g_1 ($g_1 \in \mathsf{LHS}(M)$), il fournit β_2 au bloc suivant, produit f_1, et laisse inchangé $m_1 = \mathsf{a} \cdot \mathsf{b} \cdot \mathsf{c}$.

— Le deuxième bloc reçoit donc β_2, il réécrit g_2 ($g_2 \cdot \beta_2 \in \mathsf{LHS}(M)$), il ne fournit rien au bloc suivant ($\beta_3 = \epsilon$), et produit f_2. Il ne laisse aucun mot inchangé.

— Le dernier bloc ne reçoit rien, réécrit g_3, produit f_3, et laisse inchangé $m_3 = \mathsf{b} \cdot \mathsf{b}$.

On peut alors remarquer que le mot de départ s est constitué de la concaténation des mots $g_i \cdot m_i$, alors que le mot d'arrivée t est constitué de la concaténation des mots $f_i \cdot m_i$. Par exemple, si nous reprenons la dérivation représentée par la figure 26, nous avons bien

$$s_0 = g_3 \cdot m_3 \cdot g_2 \cdot g_1 \cdot m_1,$$

et

$$s_5 = f_3 \cdot m_3 \cdot f_2 \cdot f_1 \cdot m_1.$$

À une décomposition d'une dérivation en blocs, nous associons un découpage d de s obtenu à partir des mots caractérisant les blocs. Toujours sur le même exemple, le découpage de s_0 associé à la dérivation est

$$d = \langle\epsilon, g_3, \epsilon\rangle \cdot \langle\epsilon, \mathsf{b}, \epsilon\rangle \cdot \langle\epsilon, \mathsf{b}, \epsilon\rangle \cdot \langle\epsilon, g_2, \beta_2\rangle \cdot \langle\beta_2, g_1, \epsilon\rangle \cdot \langle\epsilon, \mathsf{a}, \epsilon\rangle \cdot \langle\epsilon, \mathsf{b}, \epsilon\rangle \cdot \langle\epsilon, \mathsf{c}, \epsilon\rangle.$$

La propriété 4.1 nous permet de produire chaque f_i à partir du $\langle\beta_{i+1}, g_i, \beta_i\rangle$ correspondant. Toujours sur notre exemple, et en utilisant la propriété 4.1, on obtient une dérivation

$$d \to^*_{\mathsf{Gr}} \langle\epsilon, g_3, \epsilon\rangle \cdot m_3 \cdot \langle\epsilon, g_2, \beta_2\rangle \cdot \langle\beta_2, g_1, \epsilon\rangle \cdot m_1 \to^*_{\mathsf{Gr}} f_3 \cdot m_3 \cdot f_2 \cdot f_1 \cdot m_1 = s_5.$$

Ainsi, à une dérivation $s \;_{\mathsf{bo}(0)}{\circ\!\!\to}^*_M \bar{t}$ correspond un découpage d de s tel que $d \to^*_{\mathsf{Gr}} t$. Le découpage d est obtenu à partir de la décomposition en blocs de la dérivation marquée $\mathsf{bo}(0)$ en suivant la procédure que nous avons esquissée précédemment. La réciproque sera obtenue grâce à la définition de découpage d'un mot, et à la propriété 4.1.

4.2 Découpage d'un mot

Rappelons que M désigne un système de réécriture de mots sur un alphabet A qui vérifie $\epsilon \notin \mathsf{LHS}(M) \cup \mathsf{RHS}(M)$.

Définition 4.1 (Ensemble des non-terminaux)**.** *Nous notons* $\boldsymbol{N}$ *l'ensemble (fini) des non-terminaux de la forme*

$$\langle\alpha, g, \beta\rangle$$

pour tous

- $\alpha, \beta \in (\mathsf{Prefix}_+(\mathsf{RHS}(M))^* \cap \mathsf{Suffix}(\mathsf{LHS}(M))$,
- $g \in (\mathsf{Prefix}(\mathsf{LHS}(M)) \cup \mathsf{RHS}(M) \cup A) \backslash \{\epsilon\}$,
- $\beta \neq \epsilon \Rightarrow g \cdot \beta \in \mathsf{LHS}(M)$.

(Pour un ensemble T, $\mathsf{Prefix}_+(T)$ *désigne l'ensemble des préfixes de mots de T, privé de ϵ.)*

Ce sont ces non-terminaux qui vont nous permettre de définir les découpages d'un mot s.

Définition 4.2. *Soit* $s \in A^*, \beta_0, \beta_n \in (\mathsf{Prefix}_+(\mathsf{RHS}(M))^* \cap \mathsf{Suffix}(\mathsf{LHS}(M))$. *Un* **découpage de type (β_0, β_n) de s pour M** *est un mot $d \in N^*$ de la forme*

$$d = \langle\beta_0, g_1, \beta_1\rangle \cdot \langle\beta_1, g_2, \beta_2\rangle \dots \langle\beta_{n-1}, g_n, \beta_n\rangle,$$

qui satisfait les conditions suivantes :

1. $s = g_1 \cdot g_2 \dots g_n$,
2. *pour tout* $i \in \{1, \dots, n\}$, $g_i \cdot \beta_i \in \mathsf{LHS}(M) \cup A$.

Nous notons $\mathbf{Dec}(\boldsymbol{\beta_0, s, \beta_n})$ *l'ensemble des découpages de type (β_0, β_n) de s, et nous utilisons la notation $d(\beta_0, s, \beta_n)$ pour désigner un élément de* $\mathsf{Dec}(\beta_0, s, \beta_n)$. *Par convention,* $\mathsf{Dec}(\beta_0, \epsilon, \beta_n) = \{\epsilon\}$, *et $d(\beta_0, \epsilon, \beta_n) = \epsilon$. Un* **découpage de s** *est un découpage de type (ϵ, ϵ) de s. Nous notons* $\mathbf{Dec}(\boldsymbol{s})$ *l'ensemble des découpages de s.*

Remarque 4.3. *Notons qu'il n'y a qu'un nombre fini de découpages de type* (β_0, β_n) *d'un mot* s *(pour* (β_0, β_n) *fixé, ceci est lié au fait que* $\forall i \in \{0, \ldots, n\}, g_i \neq \epsilon$ *par définition des non-terminaux).*

Lemme 4.4. *La relation* $\{(s, \mathsf{Dec}(s)) \mid s \in A^*\}$ *est une transduction rationnelle.*

Démonstration. Soit $\mathcal{A} = (A, N, \mathcal{Q}, q_\epsilon, \{q_\epsilon\}, \delta)$, où

$$\mathcal{Q} = \{q_\beta, \beta \in (\mathsf{Prefix}_+(\mathsf{RHS}(M))^* \cap \mathsf{Suffix}(\mathsf{LHS}(M))\},$$
$$\delta = \{(q_\alpha, g/d(\alpha, g, \beta), q_\beta) \mid g \neq \epsilon, g \cdot \beta \in \mathsf{LHS}(M) \cup A\}.$$

Un chemin acceptant est de la forme

$$q_\epsilon \xrightarrow{g_1/d(\epsilon, g_1, \beta_1)} q_{\beta_1} \xrightarrow{g_2/d(\beta_1, g_2, \beta_2)} q_{\beta_2} \ldots \xrightarrow{g_n/d(\beta_{n-1}, g_n, \epsilon)} q_\epsilon.$$

Nous avons sur la première bande d'un tel chemin un terme de la forme

$$s = g_1 \cdot g_2 \ldots g_n,$$

et sur la deuxième bande un terme de la forme

$$d = d(\epsilon, g_1, \beta_1) \cdot d(\beta_1, g_2, \beta_2) \ldots d(\beta_{n-1}, g_n, \epsilon). \tag{4.2}$$

Par définition, d est un découpage de s. Réciproquement, on peut voir qu'à tout découpage d de s correspond un chemin acceptant. Ainsi, d est un découpage de s si et seulement si (s, d) est accepté par le transducteur, et le résultat est vérifié. □

Corollaire 4.5. *Si* L *est un langage algébrique (respectivement indexé), l'ensemble*

$$\mathsf{Dec}(L) = \{d \in \mathsf{Dec}(m) \mid m \in L\},$$

est un langage algébrique (respectivement indexé).

Démonstration. Puisque l'image directe d'un langage algébrique (respectivement indexé) par une transduction rationnelle est un langage algébrique (respectivement indexé), c'est une conséquence directe du lemme 4.4. □

Nous allons maintenant définir la grammaire Gr qui simule les dérivations $\mathsf{bo}(0)$ dans M.

4.3 La grammaire Gr

La grammaire Gr est composée de trois types de règles : les règles de découpage qui permettent de représenter la décomposition en blocs de la dérivation, des règles pour simuler les pas de réécriture proprement dits, et les règles qui sont les seules à produire des symboles terminaux que nous appellerons règles terminales.

Définition 4.6. *Nous notons* Gr *la grammaire algébrique sur* $(N \cup A)^*$ *composée des ensembles de règles suivants.*

1. *Les règles de découpage : pour chaque non-terminal de la forme $\langle u \cdot \alpha, g, \beta \rangle$, chaque mot γ tel que $u \cdot \gamma = g \cdot \beta$, toutes les règles de la forme*

$$\langle u \cdot \alpha, g, \beta \rangle \to d(\alpha, \gamma, \epsilon)$$

appartiennent à Gr.
(Remarquons qu'il y a pour chaque non-terminal $\mathsf{Dec}(\alpha, g, \beta)$ *et chaque découpage $d(\alpha, g \cdot \beta, \epsilon)$ une règle $\langle \alpha, g, \beta \rangle \to d(\alpha, g \cdot \beta, \epsilon) \in \mathsf{Gr}$. De même, $\langle g \cdot \beta, g, \beta \rangle \to \epsilon \in \mathsf{Gr}$.)*

2. *Les règles simulant un pas de réécriture : pour chaque non-terminal $\langle \alpha, g, \beta \rangle$, et chaque règle $g \cdot \beta \to r \in M$, la règle*

$$\langle \alpha, g, \beta \rangle \to \langle \alpha, r, \epsilon \rangle$$

appartient à Gr.

3. *Les règles terminales : pour chaque non-terminal $\langle \epsilon, g, \beta \rangle$, la règle*

$$\langle \epsilon, g, \beta \rangle \to g \cdot \beta$$

appartient à Gr.

En utilisant la remarque 4.3, on peut voir que Gr n'a qu'un nombre fini de règles que Gr est bien une grammaire algébrique. On peut aussi facilement vérifier que pour tout $\alpha, g, \beta, g', \beta'$ tels que $g \cdot \beta = g' \cdot \beta'$,

$$\mathcal{L}(\mathsf{Gr}(\langle \alpha, g, \beta \rangle)) = \mathcal{L}(\mathsf{Gr}(\langle \alpha, g', \beta' \rangle)).$$

4.4 Simulation des dérivations $\mathsf{bo}(0)$

Nous allons maintenant montrer que l'on peut simuler les dérivations $\mathsf{bo}(0)$ à l'aide de la grammaire Gr, c'est-à-dire que $s \;{}_{\mathsf{bo}(0)}\!\!\to_M^* t$ si et seulement si $\exists d \in \mathsf{Dec}(s)$ tel que $d \to_{\mathsf{Gr}}^* t$. Ce résultat est une conséquence du corollaire 4.8 au lemme qui suit, et du lemme 4.9.

Lemme 4.7. *Pour tout $\beta_0, \beta_n \in (\mathsf{Prefix}_+(\mathsf{RHS}(M)))^* \cap \mathsf{Suffix}(\mathsf{LHS}(M))$, tout mot $s, t \in A^*$,*

$$\exists d \in \mathsf{Dec}(\beta_0, s, \beta_n), d \to_{\mathsf{Gr}}^* t \Rightarrow s \cdot \beta_n \;{}_{\mathsf{bo}(0)}\!\circ\!\!\to_M^* \beta_0 \cdot \bar{t}.$$

Démonstration. Nous raisonnons par récurrence sur p la longueur de $d \to_{\mathsf{Gr}}^p t$. Si $p = 1$, alors deux cas sont possibles.

— Si la règle employée est une règle terminale, alors $\beta_0 = \epsilon$, $d = \langle \epsilon, s, \beta_n \rangle$, et $t = s \cdot \beta_n$.

— Sinon, la règle est une règle de découpage, $d = \langle \beta_0, s, \beta_n \rangle$, $t = \epsilon$, et $\beta_0 = s \cdot \beta_n$.

Le résultat est vérifié.
Soit $p > 1$. Le découpage d est de la forme

$$d = \langle \beta_0, g_1, \beta_1 \rangle \cdot \langle \beta_1, g_2, \beta_2 \rangle \dots \langle \beta_{n-1}, g_n, \beta_n \rangle,$$

le terme t est de la forme

$$t = f_1 \cdot f_2 \dots f_n,$$

avec pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

— $g_i \cdot \beta_i \in \mathsf{LHS}(M)$,

— $g_i \cdot \beta_i \to_{\mathsf{Gr}}^{\leq p-1} \beta_{i-1} \cdot f_i$.

Comme pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\langle \beta_{i-1}, g_i, \beta_i \rangle \in \mathsf{Dec}(\beta_{i-1}, g_i, \beta_i)$, par hypothèse de récurrence,

$$g_i \cdot \beta_i \ {}_{\mathsf{bo}(0)}{\circ\!\!\longrightarrow}_M^{\leq p-1} \beta_{i-1} \cdot \overline{f_i}.$$

Nous avons donc une dérivation

$$\begin{aligned} s \cdot \beta_n &= g_1 \cdot g_2 \ldots g_{n-1} \cdot g_n \cdot \beta_n \\ &{}_{\mathsf{bo}(0)}{\circ\!\!\longrightarrow}_M^{*} g_1 \cdot g_2 \ldots g_{n-1} \cdot \beta_{n-1} \cdot \overline{f_n} \\ &{}_{\mathsf{bo}(0)}{\circ\!\!\longrightarrow}_M^{*} g_1 \cdot g_2 \ldots \beta_{n-2} \cdot \overline{f_{n-1} \cdot f_n} \\ \ldots &{}_{\mathsf{bo}(0)}{\circ\!\!\longrightarrow}_M^{*} g_1 \cdot \beta_1 \cdot \overline{f_2 \ldots f_{n-1} \cdot f_n} \\ &{}_{\mathsf{bo}(0)}{\circ\!\!\longrightarrow}_M^{*} \beta_0 \cdot \overline{f_1 \cdot f_2 \ldots f_{n-1} \cdot f_n} = \beta_0 \cdot \bar{t}, \end{aligned}$$

et le résultat est vérifié. □

Corollaire 4.8. *Pour tous mots $s, t \in A^*$,*

$$\exists d \in \mathsf{Dec}(s), d \to_{\mathsf{Gr}}^{*} t \Rightarrow s \ {}_{\mathsf{bo}(0)}{\to}_M^{*} t.$$

Démonstration. C'est une conséquence directe du lemme 4.7 (il suffit de prendre $\beta_0 = \beta_n = \epsilon$). □

Nous allons maintenant démontrer la réciproque du corollaire précédent 4.8.

Lemme 4.9. *Pour tous mots $s, t \in A^*$, si*

$$s \ {}_{\mathsf{bo}(0)}{\circ\!\!\longrightarrow}_M^{*} \bar{t},$$

alors il existe $d \in \mathsf{Dec}(s)$ tel que

$$d \to_{\mathsf{Gr}}^{*} t.$$

Démonstration. Nous raisonnons par récurrence sur p la longueur de

$$s \ {}_{\mathsf{bo}(0)}{\circ\!\!\longrightarrow}_M^{p} \bar{t}.$$

Si $p = 0$, alors $s = t$, et il existe $s_0, \ldots s_n \in A$ tels que $s = s_0 \cdot s_1 \ldots s_n$. Le mot

$$d = \langle \epsilon, s_0, \epsilon \rangle \cdot \langle \epsilon, s_1, \epsilon \rangle \ldots \langle \epsilon, s_n, \epsilon \rangle,$$

est un découpage de s tel que $d \to_{\mathsf{Gr}}^{n} s_0 \ldots s_n = s$ (en utilisant des règles terminales). Le résultat est vérifié. Soit $p > 0$. La dérivation se décompose en

$$s = u \cdot l \cdot v \ {}_{\mathsf{bo}(0)}{\circ\!\!\longrightarrow}_{M, l \to r} u \cdot r \cdot (v \odot 1) \ {}_{\mathsf{bo}(0)}{\circ\!\!\longrightarrow}_M^{p-1} \bar{t} = \overline{t'} \cdot \overline{v}.$$

Les marques sur le suffixe v du mot obtenu après le premier pas sont strictement positives, et donc cette partie est inutile dans une dérivation $\mathsf{bo}(0)$ et n'est pas modifiée par la suite : on retrouve v comme suffixe de chacun des mots apparaissant dans la dérivation. Par conséquent, il y a une dérivation

$$u \cdot r \ {}_{\mathsf{bo}(0)}{\circ\!\!\longrightarrow}_M^{p-1} \overline{t'}.$$

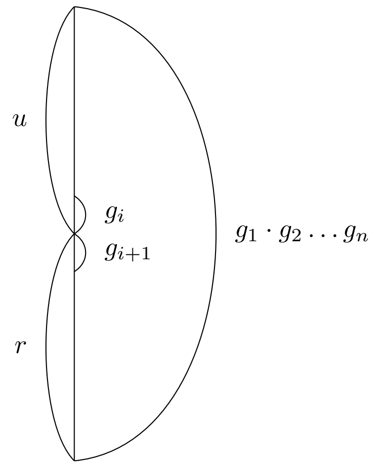

FIGURE 27 – $u = g_1 \dots g_i$ et $r = g_{i+1} \dots g_n$.

Par hypothèse de récurrence sur cette dérivation, il existe un découpage $d' \in \mathsf{Dec}(u \cdot r)$ tel que

$$\begin{aligned} d' &= \langle \beta_0, g_1, \beta_1 \rangle \cdot \langle \beta_1, g_2, \beta_2 \rangle \dots \langle \beta_{n-1}, g_n, \beta_n \rangle \\ &\to^*_{\mathsf{Gr}} t' = f_1 \cdot f_2 \dots f_n, \end{aligned}$$

avec

— $\beta_0 = \beta_n = \epsilon$,

— $u \cdot r = g_1 \cdot g_2 \dots g_n$,

— pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\langle \beta_{i-1}, g_i, \beta_i \rangle \to^*_{\mathsf{Gr}} f_i.$$

Nous distinguons deux cas

1. Il y a un indice $i \in \{0, \dots, n\}$ tel que
   — $u = g_1 \dots g_i$,
   — $r = g_{i+1} \dots g_n$,

   (Voir figure 27.)
   Soit $d_v = \epsilon$ si $v = \epsilon$ et

$$d_v = \langle \epsilon, v_0, \epsilon \rangle \dots \langle \epsilon, v_m, \epsilon \rangle$$

   s'il existe $v_0, v_m \in A$ tels que $v = v_0 \dots v_m$. Le mot

$$d = \langle \epsilon, g_1, \beta_1 \rangle \dots \langle \beta_{i-1}, g_i, \beta_i \rangle \cdot \langle \beta_i, l, \epsilon \rangle \cdot d_v,$$

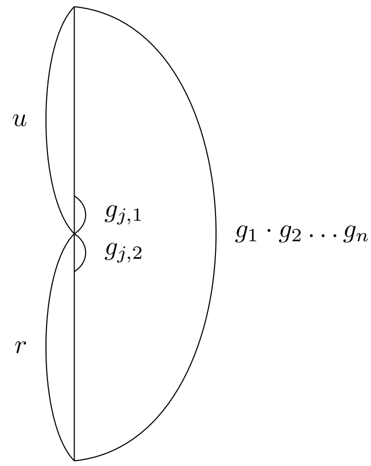

FIGURE 28 – $u \cdot r = g_1 \dots g_n$, et $g_i = g_{i,1} \cdot g_{i,2}$.

est un découpage de s. De plus, $d_v \rightarrow^*_{\mathsf{Gr}} v$ et

$$\langle \beta_i, l, \epsilon \rangle \rightarrow \langle \beta_i, r, \epsilon \rangle \in \mathsf{Gr}.$$

Comme $r = g_{i+1} \dots g_n$, il y a une règle de découpage

$$\langle \beta_i, r, \epsilon \rangle \rightarrow \langle \beta_i, g_{i+1}, \beta_{i+1} \rangle \cdot \langle \beta_{i+1}, g_{i+2}, \beta_{i+2} \rangle \dots \langle \beta_{n-1}, g_n, \epsilon \rangle \in \mathsf{Gr}.$$

Nous obtenons une dérivation

$$d \rightarrow^*_{\mathsf{Gr}} f_1 \dots f_i \cdot \langle \beta_i, g_{i+1}, \beta_{i+1} \rangle \cdot \langle \beta_{i+1}, g_{i+2}, \beta_{i+2} \rangle \dots \langle \beta_{n-1}, g_n, \epsilon \rangle \cdot v$$
$$\rightarrow^*_{\mathsf{Gr}} f_1 \dots f_n = t.$$

Le résultat est vérifié.

2. Il y a un indice $i \in \{0, \dots, n\}$, et deux mots $g_{i,1}, g_{i,2}$ tels que
   — $u = g_1 \dots g_{i-1} \cdot g_{i,1}$,
   — $r = g_{i,2} \cdot g_{i+1} \dots g_n$,
   — $g_{i,1} \cdot g_{i,2} = g_i$,
   — $g_{i,1} \neq \epsilon$.

   (Voir figure 28.)
   Remarquons que $g_{i,2} \cdot \beta_i \in (\mathsf{Prefix}_+(\mathsf{RHS}(M)))^* \cap \mathsf{Suffix}(\mathsf{LHS}(M))$. Soit $d_v = \epsilon$ si $v = \epsilon$ et

$$d_v = \langle \epsilon, v_0, \epsilon \rangle \dots \langle \epsilon, v_m, \epsilon \rangle$$

   s'il existe $v_0, v_m \in A$ tels que $v = v_0 \dots v_m$. Le mot

$$d = \langle \epsilon, g_1, \beta_1 \rangle \dots \langle \beta_{i-1}, g_{i,1}, g_{i,2} \cdot \beta_i \rangle \cdot \langle g_{i,2} \cdot \beta_i, l, \epsilon \rangle \cdot d_v,$$

est un découpage de s. De plus, $d_v \to^*_{\mathsf{Gr}} v$ et

$$\langle g_{i,2} \cdot \beta_i, l, \epsilon \rangle \to \langle g_{i,2} \cdot \beta_i, r, \epsilon \rangle \in \mathsf{Gr}.$$

En remarquant en plus que $\mathcal{L}(\mathsf{Gr}(\langle \beta_{i-1}, g_{i,1}, g_{i,2} \cdot \beta_i \rangle)) = \mathcal{L}(\mathsf{Gr}(\langle \beta_{i-1}, g_i, \beta_i \rangle))$, nous obtenons une dérivation

$$d \to^*_{\mathsf{Gr}} f_1 \cdot f_2 \dots f_i \cdot \langle g_{i,2} \cdot \beta_i, r, \epsilon \rangle \cdot v.$$

Comme $r = g_{i,2} \cdot g_{i+1} \dots g_n$, il y a une règle de découpage

$$\langle g_{i,2} \cdot \beta_i, r, \epsilon \rangle \to \langle \beta_i, g_{i+1}, \beta_{i+1} \rangle \cdot \langle \beta_{i+1}, g_{i+2}, \beta_{i+2} \rangle \dots \langle \beta_{n-1}, g_n, \epsilon \rangle \in \mathsf{Gr}.$$

Nous obtenons une dérivation

$$\begin{aligned} d &\to^*_{\mathsf{Gr}} f_1 \dots f_i \cdot \langle \beta_i, g_{i+1}, \beta_{i+1} \rangle \cdot \langle \beta_{i+1}, g_{i+2}, \beta_{i+2} \rangle \dots \langle \beta_{n-1}, g_n, \epsilon \rangle \cdot v \\ &\to^*_{\mathsf{Gr}} f_1 \dots f_n = t. \end{aligned}$$

Le résultat est vérifié.

□

Proposition 4.10. *Pour tous mots $s, t \in A^*$,*

$$s \;{}_{\mathsf{bo}(0)}{\circ\!\!\to^*}\; t \Leftrightarrow \exists d \in \mathsf{Dec}(s), d \to^*_{\mathsf{Gr}} t.$$

Démonstration. C'est une conséquence du lemme 4.9 et du corollaire 4.8. □

4.5 Préservation des langages algébriques et indexés par la réécriture $\mathsf{bo}(k)$

Nous pouvons démontrer les résultat de préservation des langages algébriques et indexés. Ce sont des corollaires de la proposition 4.10 et du corollaire 4.5.

Théorème 4.11. *Pour tout langage algébrique T et tout système de réécriture de mots M, l'ensemble $[T]({}_{\mathsf{bo}(k)}{\to^*})$ est algébrique.*

Démonstration. Il suffit de démontrer ce résultat pour $k = 0$ (proposition 3.48 page 56). De plus, nous avons vu dans la présentation de ce chapitre que nous pouvons supposer que $\epsilon \notin \mathsf{LHS}(M) \cup \mathsf{RHS}(M)$. D'après la proposition 4.10, pour tout mot $t \in A^*$,

$$\exists s \in T, s \;{}_{\mathsf{bo}(0)}{\circ\!\!\to^*}\; t \Leftrightarrow \exists d \in \mathsf{Dec}(T), d \to^*_{\mathsf{Gr}} t,$$

avec

$$\mathsf{Dec}(T) = \{\mathsf{Dec}(s) \mid s \in T\}.$$

D'après le corollaire 4.5, l'ensemble $\mathsf{Dec}(T) = \{\mathsf{Dec}(s) \mid s \in T\}$ est un langage algébrique. Il existe donc une grammaire algébrique $\mathsf{Gr}_{\mathsf{Dec}}$ qui reconnaît $\mathsf{Dec}(T)$. On peut supposer que les symboles non-terminaux de cette grammaire sont distincts des symboles de N. Si on note $\mathsf{Gr}_{\mathsf{Dec}} \cup \mathsf{Gr}$ la grammaire algébrique composée de l'union des règles de $\mathsf{Gr}_{\mathsf{Dec}}$ et des règles de Gr et ayant pour symbole de départ le symbole de départ de la grammaire $\mathsf{Gr}_{\mathsf{Dec}}$, nous avons

$$\exists s \in T, s \;{}_{\mathsf{bo}(0)}{\circ\!\!\to^*}\; t \Leftrightarrow s \in \mathcal{L}(\mathsf{Gr}_{\mathsf{Dec}} \cup \mathsf{Gr}).$$

Le résultat est vérifié. □

Théorème 4.12. *Pour tout langage indexé T et tout système de réécriture de mots M, l'ensemble $[T](\ _{\mathsf{bo}(k)}\!\rightarrow^*)$ est indexé.*

Démonstration. D'après le corollaire 4.5, l'ensemble $\mathsf{Dec}(T) = \{\mathsf{Dec}(s) \mid s \in T\}$ est un langage indexé. Il suffit de considérer la grammaire indexée $\mathsf{Gr}_{\mathsf{Dec}}$ qui reconnaît $\mathsf{Dec}(T)$, et de poursuivre le raisonnement comme dans la preuve du lemme 4.11. On obtient une grammaire indexée qui reconnaît $[T](\ _{\mathsf{bo}(k)}\!\rightarrow^*)$. $\square$

Corollaire 4.13. *Les systèmes de réécriture de mots $\mathsf{bo}(k)$ préservent l'algébricité et les langages indexés.*

Démonstration. Par définition si un système de réécriture de mots M est $\mathsf{bo}(k)$, alors $_{\mathsf{bo}(k)}\!\rightarrow^*_M = \rightarrow^*_M$. Les théorèmes 4.11 et 4.12, le résultat est vérifié. $\square$

4.6 Perspectives de recherches

Nous avons vu dans ce chapitre une méthode pour simuler les dérivations $\mathsf{bo}(k)$ dans le cas des mots et nous avons démontré que la stratégie $\mathsf{bo}(k)$ préserve l'algébricité et les langages indexés. Cela donne, entre autres, une nouvelle méthode pour décider le problème du mot pour les systèmes de réécriture de mots $\mathsf{LBO}(k)$. Cette méthode est proche de celle employée par Sakarovitch dans sa thèse d'état [76] pour les systèmes inverses basiques à gauche. De plus, nous étendons ce résultat aux langages indexés, ce qui ouvrira peut-être le champ à de nouvelles applications. Rappelons aussi que la simulation proposée originellement s'appuie sur un automate à pile, alors que nous utilisons ici une grammaire algébrique. Il serait intéressant de voir s'il serait possible d'étendre ce résultat aux systèmes de réécriture de termes linéaires. Nous conjecturons de plus que le problème de la u-terminaison est décidable pour la classe des systèmes de réécriture de mots $\mathsf{LBO}(k)$. En effet, si un système $\mathcal{R} \in \mathsf{LBO}(k)$, nous avons vu dans la section 3.9, que $\mathcal{R}$ u-termine si et seulement si :

— il existe une dérivation infinie $\mathsf{bo}(k)$,

— ou s'il existe une dérvation $s \circ\!\!\rightarrow^+_{\mathcal{R}} s$ qui n'est pas $\mathsf{bo}(k)$.

Nous conjecturons que la présence d'une telle boucle pour les systèmes de réécriture de mots $\mathsf{LBO}(k)$ peut être détectée à l'aide d'un automate à délai borné (ces automates ont été introduits dans [38]), et donc que le problème de la u-terminaison est décidable pour la classe $\mathsf{LFBO}(k)$. Pour les termes, la situation est plus compliquée, et il n'est pas certain que le problème de la u-terminaison soit décidable. Je tiens aussi à remercier Durand, Sénizergues et Salvati qui m'ont aidé à développer cette preuve, aussi bien pour l'idée de départ qui consistait à étudier l'image directe d'un ensemble algébrique, que pour l'idée d'étudier la préservation des langages indexés. Notons aussi que j'ai essayé d'étendre ce résultat aux systèmes de réécriture de termes linéaires, sans y parvenir. Il serait aussi intéressant de voir si cette méthode pourrait fournir de meilleures sous-approximations de $[T](\rightarrow_{\mathcal{R}^*})$ (lorsque T est indexé ou algébrique et $\mathcal{R}$ quelconque) que les méthodes déjà proposées et utilisées et, si oui, pour quels types de systèmes ? Nous avons déjà évoqué les champs d'application potentiels de ce genre de résultats. Nous l'avons présenté pour une vérification qui utilisait une modélisation des états du système à l'aide d'un automate de termes. Il serait peut être possible d'appliquer cette approche à d'autres protocoles, ou dans d'autres domaines comme la biologie, pour étudier des systèmes dont les états seraient représentés par des langages indexés et dont l'évolution seraient modélisée par des dérivations $\mathsf{bo}(k)$.

Chapitre 5

La stratégie k-bornée : extension au cas linéaire à gauche

5.1 Présentation du chapitre

Objectifs. Le but de ce chapitre est d'étendre la définition de la stratégie de réécriture k-bornée à des systèmes linéaires à gauche (mais pas nécessairement à droite). Nous associerons une classe de systèmes à cette stratégie : la classe des systèmes linéaires à gauches $\mathsf{BO}(k)$ qui étend la classe des systèmes $\mathsf{LBO}(k)$. Nous montrons que cette stratégie i-préserve la reconnaissabilité, et par conséquent que la classe $\mathsf{BO}(k)$ i-préserve la reconnaissabilité. Nous en déduisons que le problème de l'i-terminaison est décidable pour la classe $\mathsf{BO}(k)$. Le problème de l'appartenance à la classe $\mathsf{LBO}(0)$ étant indécidable (section 3.12.3), le problème de l'appartenance à la classe $\mathsf{BO}(0)$ l'est lui aussi. Nous introduirons donc comme dans le cas linéaire une sous-classe de $\mathsf{BO}(k)$, la classe des systèmes linéaires à gauche fortement k-bornés pour laquelle le problème de l'appartenance est décidable.

Extension de la définition. Rien dans la définition de la stratégie k-bornée pour les systèmes linéaires n'impose de considérer des systèmes linéaires à gauche qui ne sont pas linéaires à droite. Toutefois, conserver cette définition dans le cas de systèmes non linéaires à droite conduirait à définir une classe $\mathsf{BO}(k)$ ne contenant que des systèmes linéaires à gauche et à droite. Considérons par exemple le système $\mathcal{R}_2 = \{\mathsf{f}(x) \to \mathsf{h}(x,x), \mathsf{a} \to \mathsf{b}\}$ de l'exemple2.10. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il y a une dérivation

$$\mathsf{f}(\underbrace{\mathsf{f}(\ldots(\mathsf{f}}_{k \text{ fois}}(\mathsf{a}))\ldots)) \to_{\mathsf{f}(x)\to\mathsf{h}(x,x)} \mathsf{h}(\mathsf{f}(\ldots(\mathsf{f}(\mathsf{a}))\ldots), \mathsf{f}(\ldots(\mathsf{f}(\mathsf{a}))\ldots))$$

$$\to_{\mathsf{a}\to\mathsf{b}} \mathsf{h}(\mathsf{f}(\ldots(\mathsf{f}(\mathsf{a}))\ldots), \mathsf{f}(\ldots(\mathsf{f}(\mathsf{b}))\ldots)).$$

Il faut nécessairement appliquer la règle $\mathsf{f}(x) \to \mathsf{h}(x,x)$ avant la règle $\mathsf{a} \to \mathsf{b}$. Il s'agit donc de la seule dérivation allant de $\mathsf{f}(\underbrace{\mathsf{f}(\ldots(\mathsf{f}}_{k \text{ fois}}(\mathsf{a}))\ldots))$

à $\mathsf{h}(\mathsf{f}(\ldots(\mathsf{f}(\mathsf{a}))\ldots),\mathsf{f}(\ldots(\mathsf{f}(\mathsf{b}))\ldots))$. La dérivation marquée associée

$$\mathsf{f}(\underbrace{\mathsf{f}(\ldots(\mathsf{f}}_{k \text{ fois}}(\mathsf{a}))\ldots)) \circ\!\!\rightarrow \mathsf{h}(\mathsf{f}^1(\ldots(\mathsf{f}^k(\mathsf{a}^{k+1}))\ldots),\mathsf{f}^1(\ldots(\mathsf{f}^k(\mathsf{a}^{k+1}))\ldots))$$

$$\circ\!\!\rightarrow_{\mathsf{a}\rightarrow\mathsf{b}} \mathsf{h}(\mathsf{f}^1(\ldots(\mathsf{f}^k(\mathsf{a}^{k+1}))\ldots),\mathsf{f}^1(\ldots(\mathsf{f}^k(\mathsf{b}))\ldots))$$

est $\mathsf{bo}(k+1)$ et n'est pas $\mathsf{bo}(k)$ (la marque sur a lors du deuxième pas vaut $k+1$). Nous avons donc pour tout $k \in \mathbb{N}$ une dérivation $\mathsf{bo}(k+1)$ qui n'est pas $\mathsf{bo}(k)$. Cet exemple, reproductible avec tout système contenant une règle non linéaire à droite, montre qu'il ne serait pas intéressant de conserver la définition que nous avons donnée dans le cas linéaire pour définir l'extension de LBO à la classe des systèmes linéaires à gauche. Pour résoudre ce problème, nous introduisons un nouveau symbole binaire E et un système de réécriture linéaire à gauche $\mathcal{E}$ permettant de manipuler ce symbole. Ce système contient trois règles :

— la règle d'introduction $x \rightarrow E(x,x)$,

— et deux règles de sélection : $E(x,y) \rightarrow x$ et $E(x,y) \rightarrow y$.

Pour définir la notion de dérivation $\mathsf{bo}(k)$ pour un système de réécriture $\mathcal{R}$ linéaire à gauche, on va utiliser le système linéaire à gauche $\mathcal{R}\cup\mathcal{E}$ sur $\mathcal{F}\cup\{E\}$ (constitué de l'union des règles de $\mathcal{R}$ et de $\mathcal{E}$). Une dérivation dans $\mathcal{R}\cup\mathcal{E}$ sera dite $\mathsf{bo}(k)$ si la dérivation marquée associée est $\mathsf{bo}(k)$. Le marquage ressemble à celui qui s'effectue dans le cas linéaire, excepté pour les symboles E qui sont traités différement. Ils sont toujours marqués par 0. De plus, dans la définition de pas de réécriture marquée $\overline{s} \circ\!\!\rightarrow_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E},\sigma} \overline{t}$ on utilise l'opération $\odot_{\backslash\{E\}}$ pour marquer la substitution σ dans $\overline{t}$, et non l'opération $\odot$ (on ne "compte" pas les E). Et le marquage d'un terme ne s'effectue pas exactement de la même manière qu'il s'agisse d'un pas utilisant une règle de $\mathcal{R}$ (on utilise $\odot_{\backslash\{E\}}1$ pour marquer σ dans $\overline{t}$, voir définition 2.6 page 16), ou d'un pas utilisant une règle de $\mathcal{E}$ (on utilise alors $\odot_{\backslash\{E\}}0$). Cette différence nous sera utile pour étendre la notion de dérivation bh aux systèmes linéaires à gauche (section 3.4). Une dérivation dans $\mathcal{R}\cup\mathcal{E}$ sera donc $\mathsf{bo}(k)$ si lorsqu'une règle de $\mathcal{R}$ est appliquée, la partie de la substitution située à une profondeur (sans compter les E) supérieure à k n'apparaît pas dans le membre gauche d'une règle de $\mathcal{R}$ appliquée plus loin. Lorsque c'est une règle de $\mathcal{E}$, c'est la partie située à une partie supérieure à $k+1$ qui ne doit pas apparaître dans le membre gauche d'une règle de $\mathcal{R}$ appliquée plus loin. Une dérivation $s \rightarrow^*_{\mathcal{R}} t$ dans $\mathcal{R}$ sera dite k-bornée convertible (noté $\mathsf{boc}(k)$) s'il existe une dérivation $\mathsf{bo}(k)$ $s \rightarrow^*_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}} t$. Ce symbole E permet de faire des copies de sous-termes, puis d'en modifier certains, pour finalement, après quelques pas de réécriture, pouvoir les sélectionner. Nous verrons qu'en faisant cela, nous pouvons transformer toute dérivation en dérivation bh (proposition 5.62 153). Par exemple, la dérivation $\mathsf{f}(\mathsf{a}) \rightarrow_{\mathcal{R}_1} \mathsf{h}(\mathsf{a},\mathsf{a}) \rightarrow_{\mathcal{R}_1} \mathsf{h}(\mathsf{a},\mathsf{b})$ est $\mathsf{boc}(0)$. Pour obtenir une dérivation $\mathsf{bo}(0)$ dans $\mathcal{R}\cup\mathcal{E}$, on peut introduire un E juste au-dessus de a :

$$\mathsf{f}(\mathsf{a}) \circ\!\!\rightarrow_{x\rightarrow E(x,x)} \mathsf{f}(E(\mathsf{a},\mathsf{a})).$$

Puis, on réécrit une des copies de a en b :

$$\mathsf{f}(E(\mathsf{a},\mathsf{a})) \circ\!\!\rightarrow_{\mathsf{a}\rightarrow\mathsf{b}} \mathsf{f}(E(\mathsf{a},\mathsf{b})).$$

Nous pouvons alors appliquer la règle $\mathsf{f}(x) \rightarrow \mathsf{h}(x,x)$. Le processus de marquage ne prenant pas en compte les E on obtient

$$\mathsf{f}(E(\mathsf{a},\mathsf{b})) \circ\!\!\rightarrow_{\mathsf{f}(x)\rightarrow\mathsf{h}(x,x)} \mathsf{h}(E(\mathsf{a}^1,\mathsf{b}^1),E(\mathsf{a}^1,\mathsf{b}^1)).$$

Il ne reste plus ensuite qu'à sélectionner les deux sous-termes qui nous intéressent :

$$\mathsf{h}(E(\mathsf{a}^1, \mathsf{b}^1), E(\mathsf{a}^1, \mathsf{b}^1)) \circ\!\!\rightarrow_{E(x,y)\to x} \mathsf{h}(\mathsf{a}^1, E(\mathsf{a}^1, \mathsf{b}^1)) \circ\!\!\rightarrow_{E(x,y)\to y} \mathsf{h}(\mathsf{a}^1, \mathsf{b}^1).$$

Nous commencerons par introduire cette définition formellement et nous montrerons sa correction dans la section 5.2.5 (le fait que pour tout terme $s, t \in \mathcal{T}(\mathcal{F}), s \rightarrow^*_{\mathcal{R}} t \Leftrightarrow s \rightarrow^*_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}} t$). Nous introduirons également la classe de systèmes $\mathsf{BO}(k)$ associée à cette stratégie. Un système sera dit $\mathsf{BO}(k)$ si toute dérivation dans $\mathcal{R}$ est $\mathsf{boc}(k)$. La classe BO est l'union de toutes les classes $\mathsf{BO}(k)$. Comme dans le cas linéaire, l'appartenance à la classe $\mathsf{BO}(0)$ est indécidable.

Inverse-préservation de la reconnaissabilité. Nous montrons ensuite que la stratégie $\mathsf{bo}(k)$ ainsi étendue i-préserve la reconnaissabilité. Comme dans le chapitre 3 qui traite les systèmes linéaires, nous démontrons ce résultat en nous appuyant sur une simulation. Toutefois, contrairement au cas linéaire, nous avons choisi de simuler ces dérivations à l'aide d'un TTC (un transducteur de termes clos, voir définition 2.18), et non pas avec un système clos (bien que cela soit possible mais moins naturel). Nous avons vu que ce résultat implique que le problème de la i-terminaison est décidable pour la classe des systèmes $\mathsf{BO}(k)$ (proposition 3.67 page 70).

Système fortement k-bornés. Nous introduisons ensuite une sous-classe de $\mathsf{BO}(k)$, la classe $\mathsf{FBO}(k)$ des systèmes fortement k-bornés. Un système est dit fortement k-borné si toute dérivation bh dans $\mathcal{R} \cup \mathcal{E}$ est $\mathsf{bo}(k)$. Une dérivation est bh si les règles de $\mathcal{R}$ sont appliquées de bas en haut (nous ne tenons pas compte des règles de $\mathcal{E}$). L'extension de la stratégie bh au cas linéaire à gauche n'est pas non plus restrictive : toute dérivation de $\mathcal{R}$ peut être transformée en dérivation bh (proposition 5.62 page 153), et nous avons $\mathsf{FBO}(k) \subset \mathsf{BO}(k)$. Nous démontrerons que le problème de l'appartenance à $\mathsf{FBO}(k)$ est décidable (contrairement à la classe $\mathsf{BO}(0)$). Nous nous servons aussi de ce résultat pour montrer que les systèmes growing linéaires à gauche sont dans la classe FBO qui est l'union de toutes les classes $\mathsf{FBO}(k)$. Nous conjecturons que les systèmes inverses linéaires à droite finite path overlapping ($i - \mathsf{LDFPO}$) appartiennent à FBO. En effet, la méthode employée dans le cas linéaire semble pouvoir s'adapter au cas linéaire (voir section 3.13). Aucune preuve n'est toutefois présentée dans cette thèse.

5.2 Réécriture k-bornée

Dans ce chapitre, $\mathcal{F}$ désigne une signature (finie), et $\mathcal{R}$ désigne un système linéaire à gauche qui vérifie la condition

$$\forall l \to r \in \mathcal{R}, \mathcal{V}\mathsf{ar}(r) \subseteq \mathcal{V}\mathsf{ar}(l). \tag{5.1}$$

Nous désignerons par $\mathcal{A} = (\mathcal{F}, \mathcal{Q}, \mathcal{Q}_f, \Gamma)$ un automate complet déterministe qui reconnaît un language $T \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{F})$. Soit $E \notin \mathcal{F}$ un symbole d'arité 2.

5.2.1 Le système de réécriture $\mathcal{E}$

Définition 5.1 (Le système $\mathcal{E}$)**.** *Soit $x, y \in \mathcal{V}$. Le système de réécriture $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{F} \cup \{E\}$ est composé des règles*

$$x \to E(x,x) \tag{5.2}$$

$$E(x,y) \to x \text{ et } E(x,y) \to y \tag{5.3}$$

La règle 5.2 est appelée **règle d'introduction***. Les règles 5.3 sont appelées* **règles de sélection***. Remarquons que le système $\mathcal{R} \cup \mathcal{E}$ est linéaire à gauche.*

5.2.2 Réécriture marquée

Pour le reste de ce chapitre, k désigne un entier naturel, et $\mathcal{F}$ désigne toujours une signature finie. Comme dans le cas linéaire, nous allons introduire la réécriture marquée. Seuls les symboles de $\mathcal{F}$ sont marqués, le E lui n'est pas marqué, c'est-à-dire que nous considérons l'ensemble des termes $\mathcal{T}(\mathcal{F}^{\mathbb{N}} \cup \{E\}, \mathcal{V})$. Nous utilisons les notations suivantes :

— $\mathcal{T}(\mathcal{V})$ désigne l'ensemble des termes $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$, et $\mathcal{T}$ l'ensemble $\mathcal{T}(\mathcal{F})$,

— $\overline{\mathcal{T}}(\mathcal{V})$ désigne l'ensemble des termes $\overline{\mathcal{T}}(\mathcal{F}^{\mathbb{N}}, \mathcal{V})$, et $\overline{\mathcal{T}}$ l'ensemble $\overline{\mathcal{T}}(\mathcal{F}^{\mathbb{N}})$,

— $\boldsymbol{\mathcal{T}_E(\mathcal{V})}$ désigne l'ensemble des termes $\mathcal{T}(\mathcal{F} \cup \{E\}, \mathcal{V})$, et $\boldsymbol{\mathcal{T}_E}$ l'ensemble $\mathcal{T}(\mathcal{F} \cup \{E\})$,

— $\boldsymbol{\overline{\mathcal{T}}_E(\mathcal{V})}$ désigne l'ensemble des termes $\mathcal{T}(\mathcal{F}^{\mathbb{N}} \cup \{E\}, \mathcal{V})$, et $\boldsymbol{\overline{\mathcal{T}}_E}$ l'ensemble $\mathcal{T}(\mathcal{F}^{\mathbb{N}} \cup \{E\})$

Nous allons maintenant introduire la relation de réécriture $\circ\!\!\to_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}}$ entre termes marqués. Nous notons $\odot$ ce qui devrait être noté $\odot_{\setminus\{E\}}$. Rappelons que $\bar{t} \odot n$ est défini pour tout terme marqué $\bar{t} \in \overline{\mathcal{T}}_E(\mathcal{V})$ et pour tout entier n comme l'unique terme satisfaisant :

— $(\bar{t} \odot 0)^0 = t$,

— $\forall u \in \mathcal{P}\mathsf{os}_{\setminus E}(t), \mathsf{m}(\bar{t} \odot n/u) = \max(\bar{t}/u, \mathsf{Card}(\mathcal{P}\mathsf{os}^{\prec u}_{\setminus E}(t)) + n)$.

Remarquons qu'il n'y a pas de confusion possible au vu des domaines de définition de $\odot$ et $/$ et qu'il n'y a pas besoin de parenthèses dans l'expression $\bar{t} \odot n/u$, qui désigne le sous-terme obtenu à la position u après avoir appliqué $\odot$ n à $\bar{t}$.

Définition 5.2 (Réécriture marquée)**.** *Un terme marqué $\bar{s} \in \overline{\mathcal{T}}_E$ se réécrit en un terme marqué $\bar{t} \in \overline{\mathcal{T}}_E$ s'il existe une règle $l \to r \in \mathcal{R} \cup \mathcal{E}$, une position $v \in \mathcal{P}\mathsf{os}(s)$, une version marquée $\bar{l}$ de l, et une substitution marquée $\bar{\sigma}$ telles que*

$$\bar{s} = \bar{s}[\bar{l}\bar{\sigma}]_v, \text{ et } \bar{t} = \bar{s}[r(\bar{\sigma} \odot a)]_v$$

où $a = 0$ si $l \to r \in \mathcal{E}$ et $a = 1$ si $l \to r \in \mathcal{R}$. Nous noterons alors

$$\bar{s} \circ\!\!\to_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}} \bar{t}.$$

Nous préciserons parfois la règle appliquée, la position où cette règle est appliquée, la version marquée du membre gauche, la substitution utilisée, et la substitution utilisée sans les marques et noterons $\bar{s} \circ\!\!\to_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}, l\to r, v, \bar{l}, \bar{\sigma}, \sigma} \bar{t}$. Nous nous autoriserons à faire figurer un ou plusieurs de ces indices, et nous omettrons parfois $\mathcal{R} \cup \mathcal{E}$ lorsque cela ne prête pas à confusion. Remarquons que nous utilisons deux marquages différents ($a = 0$ ou $a = 1$) selon que la règle appliquée appartient à $\mathcal{R}$ ou $\mathcal{E}$. Nous verrons que grâce à ces deux marquages distincts, la stratégie bh reste non-restrictive (toute dérivation peut être transformée en dérivation bh, proposition 5.62 page 153).

Dérivation marquée associée

Comme dans le cas linéaire, à chaque dérivation dans $\mathcal{R} \cup \mathcal{E}$,

$$\begin{aligned} d : s_0 &\to_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}, l_0 \to r_0, v_0} s_1 \\ &\ldots \to_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}, l_{n-1} \to r_{n-1}, v_{n-1}} s_n \end{aligned} \tag{5.4}$$

nous faisons correspondre une (unique) dérivation marquée

$$\begin{aligned} \overline{d} : \overline{s_0} = s_0 \circ\!\!\to_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}, l_0 \to r_0, v_0} \overline{s_1} \to_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}, l_1 \to r_1, v_1} \\ \ldots \circ\!\!\to_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}, l_{n-1} \to r_{n-1}, v_{n-1}} \overline{s_n}, \end{aligned} \tag{5.5}$$

appelée la **dérivation marquée associée à $\boldsymbol{d}$**. L'unicité de $\overline{d}$ est garantie par le fait que pour $i \in \mathbb{N}$, $\overline{s_{i+1}}$ est entièrement déterminé par $\overline{s_i}$, v_i et $l_i \to r_i$.

Exemple 5.3. *Nous considérons les systèmes suivants*

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_2 &= \{\mathsf{f}(x) \to \mathsf{h}(x, x),\ \mathsf{a} \to \mathsf{b}\}, \\ \mathcal{R}_9 &= \{x \to \mathsf{h}(x, x), \mathsf{a} \to \mathsf{b}, \mathsf{a} \to \mathsf{c}\}, \\ \mathcal{R}_{10} &= \{\mathsf{f}(x) \to \mathsf{h}(x, x),\ \mathsf{h}(x, \mathsf{b}) \to \mathsf{c},\ \mathsf{a} \to \mathsf{b}\}, \\ \mathcal{R}_{11} &= \{\mathsf{h}(\mathsf{i}(x), y) \to \mathsf{h}(x, x)\}. \end{aligned}$$

La dérivation dans $\mathcal{R}_2$

$$d_0 : \mathsf{f}(\mathsf{a}) \to_{\mathcal{R}_2,\epsilon} \mathsf{h}(\mathsf{a}, \mathsf{a}) \to_{\mathcal{R}_2,0} \mathsf{h}(\mathsf{b}, \mathsf{a})$$

est associée à la dérivation marquée

$$\overline{d_0} : \mathsf{f}(\mathsf{a}) \to_{\mathcal{R}_2,\epsilon} \mathsf{h}(\mathsf{a}^1, \mathsf{a}^1) \to_{\mathcal{R}_2,0} \mathsf{h}(\mathsf{b}, \mathsf{a}^1).$$

La dérivation dans $\mathcal{R}_2 \cup \mathcal{E}$

$$\begin{aligned} td'_0 : \mathsf{f}(\mathsf{a}) &\to_{x \to E(x,x),0} \mathsf{f}(E(\mathsf{a}, \mathsf{a})) \to_{\mathcal{R}_2,00} \mathsf{f}(E(\mathsf{b}, \mathsf{a})) \to_{\mathcal{R}_2,\epsilon} \mathsf{h}(E(\mathsf{b}, \mathsf{a}), E(\mathsf{b}, \mathsf{a})) \\ &\to_{E(x,y) \to x,0} \mathsf{h}(\mathsf{b}, E(\mathsf{b}, \mathsf{a})) \to_{E(x,y) \to y,1} \mathsf{h}(\mathsf{b}, \mathsf{a}), \end{aligned}$$

est associée à la dérivation marquée

$$\begin{aligned} \overline{d'_0} : \mathsf{f}(\mathsf{a}) &\circ\!\!\to_{x \to E(x,x),0} \mathsf{f}(E(\mathsf{a}, \mathsf{a})) \circ\!\!\to_{\mathcal{R}_2,00} \mathsf{f}(E(\mathsf{b}, \mathsf{a})) \circ\!\!\to_{\mathcal{R}_2,\epsilon} \mathsf{h}(E(\mathsf{b}^1, \mathsf{a}^1), E(\mathsf{b}^1, \mathsf{a}^1)) \\ &\circ\!\!\to_{E(x,y) \to x,0} \mathsf{h}(\mathsf{b}^1, E(\mathsf{b}^1, \mathsf{a}^1)) \to_{E(x,y) \to y,1} \mathsf{h}(\mathsf{b}^1, \mathsf{a}^1). \end{aligned}$$

La dérivation dans $\mathcal{R}_9 \cup \mathcal{E}$

$$\begin{aligned} d_1 : \mathsf{i}(\mathsf{a}) &\to_{x \to E(x,x),\epsilon} E(\mathsf{i}(\mathsf{a}), \mathsf{i}(\mathsf{a})) \to_{x \to E(x,x),0} E(E(\mathsf{i}(\mathsf{a}), \mathsf{i}(\mathsf{a})), \mathsf{i}(\mathsf{a})) \\ &\to_{\mathsf{a} \to \mathsf{b}} E(E(\mathsf{i}(\mathsf{a}), \mathsf{i}(\mathsf{b})), \mathsf{i}(\mathsf{a})) \to_{\mathsf{a} \to \mathsf{c}} E(E(\mathsf{i}(\mathsf{a}), \mathsf{i}(\mathsf{b})), \mathsf{i}(\mathsf{c})) \\ &\to_{x \to \mathsf{h}(x,x)),0} E(\mathsf{h}(E(\mathsf{i}(\mathsf{a}), \mathsf{i}(\mathsf{b})), E(\mathsf{i}(\mathsf{a}), \mathsf{i}(\mathsf{b}))), \mathsf{i}(\mathsf{c})) \\ &\to_{x \to \mathsf{h}(x,x),\epsilon} \mathsf{h}(E(\mathsf{h}(E(\mathsf{i}(\mathsf{a}), \mathsf{i}(\mathsf{b})), E(\mathsf{i}(\mathsf{a}), \mathsf{i}(\mathsf{b}))), \mathsf{i}(\mathsf{c})), \\ &E(\mathsf{h}(E(\mathsf{i}(\mathsf{a}), \mathsf{i}(\mathsf{b})), E(\mathsf{i}(\mathsf{a}), \mathsf{i}(\mathsf{b}))), \mathsf{i}(\mathsf{c}))) \\ &\to_{E(x,y) \to x,000} \mathsf{h}(E(\mathsf{h}(\mathsf{i}(\mathsf{a}), E(\mathsf{i}(\mathsf{a}), \mathsf{i}(\mathsf{b}))), \mathsf{i}(\mathsf{c})), \\ &E(\mathsf{h}(E(\mathsf{i}(\mathsf{a}), \mathsf{i}(\mathsf{b})), E(\mathsf{i}(\mathsf{a}), \mathsf{i}(\mathsf{b}))), \mathsf{i}(\mathsf{c}))) \\ &\to_{E(x,y) \to y,001} \mathsf{h}(E(\mathsf{h}(\mathsf{i}(\mathsf{a}), \mathsf{i}(\mathsf{b})), \mathsf{i}(\mathsf{c})), \\ &E(\mathsf{h}(E(\mathsf{i}(\mathsf{a}), \mathsf{i}(\mathsf{b})), E(\mathsf{i}(\mathsf{a}), \mathsf{i}(\mathsf{b}))), \mathsf{i}(\mathsf{c}))) \\ &\to_{E(x,y) \to x,0} \mathsf{h}(\mathsf{h}(\mathsf{i}(\mathsf{a}), \mathsf{i}(\mathsf{b})), \\ &E(\mathsf{h}(E(\mathsf{i}(\mathsf{a}), \mathsf{i}(\mathsf{b})), E(\mathsf{i}(\mathsf{a}), \mathsf{i}(\mathsf{b}))), \mathsf{i}(\mathsf{c}))) \\ &\to_{E(x,y) \to y,01} \mathsf{h}(\mathsf{h}(\mathsf{i}(\mathsf{a}), \mathsf{i}(\mathsf{b})), \mathsf{i}(\mathsf{c})) \end{aligned}$$

est associée à la dérivation marquée

$$\begin{aligned}
\overline{d_1} : \mathsf{i}(\mathsf{a}) &\circ\!\!\rightarrow_{x\to E(x,x),\epsilon} E(\mathsf{i}(\mathsf{a}^1),\mathsf{i}(\mathsf{a}^1)) \circ\!\!\rightarrow_{x\to E(x,x),0} E(E(\mathsf{i}(\mathsf{a}^1),\mathsf{i}(\mathsf{a}^1)),\mathsf{i}(\mathsf{a}^1))\\
&\circ\!\!\rightarrow_{\mathsf{a}\to\mathsf{b}} E(E(\mathsf{i}(\mathsf{a}^1),\mathsf{i}(\mathsf{b})),\mathsf{i}(\mathsf{a}^1)) \circ\!\!\rightarrow_{\mathsf{a}\to\mathsf{c}} E(E(\mathsf{i}(\mathsf{a}^1),\mathsf{i}(\mathsf{b})),\mathsf{i}(\mathsf{c}))\\
&\circ\!\!\rightarrow_{x\to\mathsf{h}(x,x)),0} E(\mathsf{h}(E(\mathsf{i}^1(\mathsf{a}^2),\mathsf{i}^1(\mathsf{b}^2)),E(\mathsf{i}^1(\mathsf{a}^2),\mathsf{i}^1(\mathsf{b}^2))),\mathsf{i}^1(\mathsf{c}^2))\\
&\circ\!\!\rightarrow_{x\to\mathsf{h}(x,x),\epsilon} \mathsf{h}(E(\mathsf{h}^1(E(\mathsf{i}^2(\mathsf{a}^3),\mathsf{i}^2(\mathsf{b}^3)),E(\mathsf{i}^2(\mathsf{a}^3),\mathsf{i}^2(\mathsf{b}^3))),\mathsf{i}^1(\mathsf{c}^2)),\\
&E(\mathsf{h}^1(E(\mathsf{i}^2(\mathsf{a}^3),\mathsf{i}^2(\mathsf{b}^3)),E(\mathsf{i}^2(\mathsf{a}^3),\mathsf{i}^2(\mathsf{b}^3))),\mathsf{i}^1(\mathsf{c}^2)))\\
&\circ\!\!\rightarrow_{E(x,y)\to x,000} \mathsf{h}(E^2(\mathsf{h}(\mathsf{i}^2(\mathsf{a}^3),E(\mathsf{i}^2(\mathsf{a}^3),\mathsf{i}^2(\mathsf{b}^3))),\mathsf{i}^1(\mathsf{c}^2)),\\
&E(\mathsf{h}^1(E(\mathsf{i}^2(\mathsf{a}^3),\mathsf{i}^2(\mathsf{b}^3)),E(\mathsf{i}^2(\mathsf{a}^3),\mathsf{i}^2(\mathsf{b}^3))),\mathsf{i}^1(\mathsf{c}^2)))\\
&\circ\!\!\rightarrow_{E(x,y)\to y,001} \mathsf{h}(E(\mathsf{h}^1(\mathsf{i}^2(\mathsf{a}^3),\mathsf{i}^2(\mathsf{b}^3)),\mathsf{i}^1(\mathsf{c}^2)),\\
&E(\mathsf{h}^1(E(\mathsf{i}^2(\mathsf{a}^3),\mathsf{i}^2(\mathsf{b}^3)),E(\mathsf{i}^2(\mathsf{a}^3),\mathsf{i}^2(\mathsf{b}^3))),\mathsf{i}^1(\mathsf{c}^2)))\\
&\circ\!\!\rightarrow_{E(x,y)\to x,0} \mathsf{h}(\mathsf{h}^1(\mathsf{i}^2(\mathsf{a}^3),\mathsf{i}^2(\mathsf{b}^3)),\\
&E(\mathsf{h}^1(E(\mathsf{i}^2(\mathsf{a}^3),\mathsf{i}^2(\mathsf{b}^3)),E(\mathsf{i}^2(\mathsf{a}^3),\mathsf{i}^2(\mathsf{b}^3))),\mathsf{i}^1(\mathsf{c}^2)))\\
&\circ\!\!\rightarrow_{E(x,y)\to y,01} \mathsf{h}(\mathsf{h}^1(\mathsf{i}^2(\mathsf{a}^3),\mathsf{i}^2(\mathsf{b}^3)),\mathsf{i}^1(\mathsf{c}^2)).
\end{aligned}$$

Dans $\mathcal{R}_{10}\cup\mathcal{E}$ la dérivation

$$\begin{aligned}
d_2 : \mathsf{f}(\mathsf{a}) &\rightarrow_{x\to E(x,x),0} \mathsf{f}(E(\mathsf{a},\mathsf{a}))\\
&\rightarrow_{\mathsf{a}\to\mathsf{b}} \mathsf{f}(E(\mathsf{a},\mathsf{b})) \rightarrow_{\mathsf{f}(x)\to\mathsf{h}(x,x)} \mathsf{h}(E(\mathsf{a},\mathsf{b}),E(\mathsf{a},\mathsf{b}))\\
&\rightarrow_{E(x,y)\to x,0} \mathsf{h}(\mathsf{a},E(\mathsf{a},\mathsf{b})) \rightarrow_{E(x,y)\to x,1} \mathsf{h}(\mathsf{a},\mathsf{b}) \rightarrow_{\mathsf{h}(x,\mathsf{b})\to\mathsf{c}} \mathsf{c},
\end{aligned}$$

est associée à la dérivation marquée

$$\begin{aligned}
\overline{d_2} : \mathsf{f}(\mathsf{a}) &\circ\!\!\rightarrow_{x\to E(x,x),0)} \mathsf{f}(E(\mathsf{a},\mathsf{a})) \circ\!\!\rightarrow_{\mathsf{a}\to\mathsf{b}} \mathsf{f}(E(\mathsf{a},\mathsf{b}))\\
&\circ\!\!\rightarrow_{\mathsf{f}(x)\to\mathsf{h}(x,x)} \mathsf{h}(E(\mathsf{a}^1,\mathsf{b}^1),E(\mathsf{a}^1,\mathsf{b}^1))\\
&\circ\!\!\rightarrow_{E(x,y)\to x,0} \mathsf{h}(\mathsf{a}^1,E(\mathsf{a}^1,\mathsf{b}^1)) \circ\!\!\rightarrow_{E(x,y)\to x,1} \mathsf{h}(\mathsf{a}^1,\mathsf{b}^1) \rightarrow_{\mathsf{h}(x,\mathsf{b})\to\mathsf{c}} \mathsf{c}.
\end{aligned}$$

5.2.3 Réécriture k-bornée et systèmes de réécriture k-bornés

Nous pouvons maintenant introduire la réécriture k-bornée. La définition est relativement similaire à celle dans le cas linéaire.

Définition 5.4 (Réécriture k-bornée)**.** *Un pas de réécriture marquée*

$$\overline{s} \circ\!\!\rightarrow_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E},l\to r,v,\bar{l}} \overline{t}$$

est k-borné si $l\to r\in\mathcal{E}$, ou si $l\to r\in\mathcal{R}$ et si les deux conditions suivantes sont satisfaites

$$l\notin\mathcal{V} \Rightarrow \mathsf{mmax}(\bar{l}) \leq k, \tag{5.6}$$

$$l\in\mathcal{V} \Rightarrow \forall u\prec v, \mathsf{m}(\bar{l}/u) \leq k. \tag{5.7}$$

Une dérivation marquée est **bo(k)** *si tous ses pas sont* $\mathsf{bo}(k)$*. La dérivation 5.4 dans $\mathcal{R}\cup\mathcal{E}$ est* $\mathsf{bo}(k)$ *si la dérivation marquée associée 5.5 est* $\mathsf{bo}(k)$*. Une dérivation $s\rightarrow^*_{\mathcal{R}} t$ est* **bo(k) convertible** *(noté* $\mathsf{boc}(k)$*) s'il existe une dérivation* $\mathsf{bo}(k)$ *$s\rightarrow^*_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}} t$. Le système de réécriture $\mathcal{R}$ est* $\mathsf{bo}(k)$ *si toute dérivation dans*

$\mathcal{R}$ *est* $\mathsf{boc}(k)$. *Nous notons* $\mathbf{BO}(\boldsymbol{k})$ *la classe des systèmes* $\mathsf{bo}(k)$, *et* **BO** *l'union de toutes ces classes*

$$\mathsf{BO} := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathsf{BO}(k).$$

Notons qu'il s'agit bien d'une extension de la notion de dérivation $\mathsf{bo}(k)$ du cas linéaire au cas linéaire à gauche. En effet si une dérivation marquée dans $\mathcal{R}\cup\mathcal{E}$ ne comporte pas de pas dans $\mathcal{E}$, alors elle est $\mathsf{bo}(k)$ au sens de la définition 3.6 page 34 si et seulement si elle est $\mathsf{bo}(k)$ dans $\mathcal{R}\cup\mathcal{E}$ au sens de 5.4. Ainsi, nous avons bien $\mathsf{LBO}(k) \subset \mathsf{BO}(k)$. Nous introduisons maintenant quelques notations.

Définition 5.5. *La relation binaire* ${}_{\mathbf{bo}(\boldsymbol{k})}\!\circ\!\!\boldsymbol{\to}_{\boldsymbol{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}}}$ *sur* $\overline{\mathcal{T}}_E \times \overline{\mathcal{T}}_E$ *est définie par* $\overline{s}\ {}_{\mathsf{bo}(k)}\!\circ\!\!\to_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}} \overline{t}$ *s'il existe un pas de réécriture marquée* $\mathsf{bo}(k)$ *dans* $\mathcal{R}\cup\mathcal{E}$ *qui va de* $\overline{s}$ *à* $\overline{t}$. *Nous noterons* $\boldsymbol{\overline{s}}\ {}_{\mathbf{bo}(\boldsymbol{k})}\!\circ\!\!\boldsymbol{\to}^*_{\boldsymbol{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}}}\ \boldsymbol{\overline{t}}$ *s'il existe une dérivation* $\mathsf{bo}(k)$ *du terme marqué* $\overline{s}$ *au terme marqué* $\overline{t}$. *La relation binaire* ${}_{\mathsf{boc}(k)}\!\!\to^*_{\mathcal{R}}$ *sur* $\mathcal{T}_E \times \mathcal{T}_E$ *est définie par* $s\ {}_{\mathsf{boc}(k)}\!\!\to^*_{\mathcal{R}}\ t$ *s'il existe une dérivation* $\mathsf{boc}(k)$ *de* s *à* t.

Comme la composée de deux dérivation marquées $\mathsf{bo}(k)$ est $\mathsf{bo}(k)$, ${}_{\mathsf{bo}(k)}\!\circ\!\!\to^*_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}}$ est bien la clôture réflexive et transitive de ${}_{\mathsf{bo}(k)}\!\circ\!\!\to_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}}$. Notons que la composition de deux dérivations $\mathsf{boc}(k)$ n'est pas nécessairement une dérivation $\mathsf{boc}(k)$ (sinon toute dérivation serait $\mathsf{boc}(k)$ puisqu'un pas de réécriture seul est toujours $\mathsf{boc}(k)$).

Exemple 5.6. *Reprenons les dérivations de l'exemple 5.3. La dérivation* $\overline{d_0}$ *est* $\mathsf{bo}(1)$ *puisque la marque maximale apparaissant dans le membre gauche d'une règle appliquée est* 1 *:*

$$\overline{d_0} : \mathsf{f}(\mathsf{a}) \to_{\mathcal{R}_2,\epsilon} \mathsf{h}(\mathsf{a}^1,\mathsf{a}^1) \to_{\mathcal{R}_2,0} \mathsf{h}(\mathsf{b},\mathsf{a}^1).$$

La dérivation d_0 : $\mathsf{f}(\mathsf{a}) \to^*_{\mathcal{R}_2} \mathsf{h}(\mathsf{b},\mathsf{a}^1)$ *est* $\mathsf{boc}(0)$ *puisque la dérivation*

$$\overline{d'_0} : \mathsf{f}(\mathsf{a}) \circ\!\!\to_{x\to E(x,x),0} \mathsf{f}(E(\mathsf{a},\mathsf{a})) \circ\!\!\to_{\mathcal{R}_0,00} \mathsf{f}(E(\mathsf{b},\mathsf{a})) \circ\!\!\to_{\mathcal{R}_0,\epsilon} \mathsf{h}(E(\mathsf{b}^1,\mathsf{a}^1),E(\mathsf{b}^1,\mathsf{a}^1))$$

est $\mathsf{bo}(0)$. *Le système* $\mathcal{R}_2$ *est dans* $\mathsf{BO}(0)$ *: toute dérivation est* $\mathsf{boc}(0)$. *Dans* $\mathcal{R}_9$, *La dérivation suivante* $\overline{d_1}$ *est* $\mathsf{bo}(1)$ *puisque la marque* 1 *apparaît dans le membre gauche d'une règle appliquée :*

$$\begin{aligned}\overline{d_1} : \mathsf{i}(\mathsf{a}) &\circ\!\!\to_{x\to E(x,x),\epsilon} E(\mathsf{i}(\mathsf{a}^1),\mathsf{i}(\mathsf{a}^1)) \circ\!\!\to_{x\to E(x,x),0} E(E(\mathsf{i}(\mathsf{a}^1),\mathsf{i}(\mathsf{a}^1)),\mathsf{i}(\mathsf{a}^1))\\ &\circ\!\!\to_{\mathsf{a}\to\mathsf{b}} E(E(\mathsf{i}(\mathsf{a}^1),\mathsf{i}(\mathsf{b})),\mathsf{i}(\mathsf{a}^1)) \circ\!\!\to_{\mathsf{a}\to\mathsf{c}} \dots\end{aligned}$$

Toutefois, d_1 *est* $\mathsf{boc}(0)$. *En effet, il y a une dérivation marquée* $\mathsf{bo}(0)$ *:*

$$\begin{aligned}\overline{d'_1} : \mathsf{i}(\mathsf{a}) &\circ\!\!\to_{x\to E(x,x),0} \mathsf{i}(E(\mathsf{a},\mathsf{a})) \circ\!\!\to_{x\to E(x,x),0} \mathsf{i}(E(E(\mathsf{a},\mathsf{a}),\mathsf{a}))\\
&\circ\!\!\to_{\mathsf{a}\to\mathsf{b},001} \mathsf{i}(E(E(\mathsf{a},\mathsf{b}),\mathsf{a})) \circ\!\!\to_{\mathsf{a}\to\mathsf{c},02} \mathsf{i}(E(E(\mathsf{a},\mathsf{b})),\mathsf{c})\\
&\circ\!\!\to_{x\to\mathsf{h}(x,x)),00} \mathsf{i}(E(\mathsf{h}(E(\mathsf{a}^1,\mathsf{b}^1),E(\mathsf{a}^1,\mathsf{b}^1)),\mathsf{c}))\\
&\circ\!\!\to_{E(x,y)\to x,000} \mathsf{i}(E(\mathsf{h}(\mathsf{a}^1,E(\mathsf{a}^1,\mathsf{b}^1)),\mathsf{c}))\\
&\circ\!\!\to_{E(x,y)\to y,001} \mathsf{i}(E(\mathsf{h}(\mathsf{a}^1,\mathsf{b}^1),\mathsf{c}))\\
&\circ\!\!\to_{x\to\mathsf{h}(x,x),\epsilon} \mathsf{h}(\mathsf{i}^1(E(\mathsf{h}^2(\mathsf{a}^3,\mathsf{b}^3),\mathsf{c}^2)),\mathsf{i}^3(E(\mathsf{h}^2(\mathsf{a}^3,\mathsf{b}^3),\mathsf{c}^2)))\\
&\circ\!\!\to_{E(x,y)\to x,00} \mathsf{h}(\mathsf{i}^1(\mathsf{h}^2(\mathsf{a}^3,\mathsf{b}^3)),\mathsf{i}^3(E(\mathsf{h}^2(\mathsf{a}^3,\mathsf{b}^3),\mathsf{c}^2)))\\
&\circ\!\!\to_{E(x,y)\to y,11} \mathsf{h}(\mathsf{i}^1(\mathsf{h}^2(\mathsf{a}^3,\mathsf{b}^3)),\mathsf{c}^2).\end{aligned}$$

Le système $\mathcal{R}_9$ est lui aussi $\mathsf{BO}(0)$*. La dérivation d_2 est* $\mathsf{boc}(1)$ *puisque $\overline{d_2}$ est* $\mathsf{bo}(1)$*. En effet, dans d_2 la marque maximale apparaissant dans le membre gauche d'une règle appliquée est 1 :*

$$\begin{aligned}\overline{d_2} : \mathsf{f}(\mathsf{a}) &\circ\!\!\rightarrow_{x\to E(x,x),0)} \mathsf{f}(E(\mathsf{a},\mathsf{a})) \circ\!\!\rightarrow_{\mathsf{a}\to\mathsf{b}} \mathsf{f}(E(\mathsf{a},\mathsf{b})) \\ &\circ\!\!\rightarrow_{\mathsf{f}(x)\to\mathsf{h}(x,x)} \mathsf{h}(E(\mathsf{a}^1,\mathsf{b}^1),E(\mathsf{a}^1,\mathsf{b}^1)) \\ &\circ\!\!\rightarrow_{E(x,y)\to x,0} \mathsf{h}(\mathsf{a}^1,E(\mathsf{a}^1,\mathsf{b}^1)) \circ\!\!\rightarrow_{E(x,y)\to y,1} \mathsf{h}(\mathsf{a}^1,\mathsf{b}^1) \rightarrow_{\mathsf{h}(x,\mathsf{b})\to\mathsf{c}} \mathsf{c}.\end{aligned}$$

Le système $\mathcal{R}_{10}$ est $\mathsf{BO}(1)$*. Le système $\mathcal{R}_{11}$ admet des dérivations* $\mathsf{bo}(k)$ *qui ne sont pas* $\mathsf{bo}(k-1)$ *pour tout $k \in \mathbb{N}$ (il suffit de procéder comme dans l'exemple 3.33 page 47 avec le système $\mathcal{R}_0$). Ce système n'appartient pas à* BO*.*

5.2.4 Dérivation bien marquée pour k

Nous introduisons la notion de dérivation bien marquée pour k. Comme dans le cas linéaire, nous verrons que tous les termes apparaissant dans une dérivation marquée associée à une dérivation $\mathsf{bo}(k)$ sont bien marqués pour k.

Définition 5.7 (Terme bien marqué pour k)**.** *Un terme $\overline{t} \in \overline{\mathcal{T}}_E(\mathcal{V})$ est* **bien marqué pour k** *si pour tout $w \in \mathcal{L}\mathsf{v}(t)$, une de ces deux conditions est vérifiée :*

1) *pour tout $u \preceq w, \mathsf{m}(\overline{t}/u) \leq k$*
2) *il existe $u \in \mathcal{P}\mathsf{os}_{\mathcal{F}}^{\preceq w}(t)$, tel que*
   - $\forall v \prec u$, $\mathsf{m}(\overline{t}/v) \leq k$,
   - $\forall v \in \mathcal{P}\mathsf{os}_{\mathcal{F}}^{\succeq u}(t)$, $\mathsf{m}(\overline{t}/v) = k+1+\mathsf{Card}(\mathcal{P}\mathsf{os}_{\setminus E}{}^{\prec v}(t))-\mathsf{Card}(\mathcal{P}\mathsf{os}_{\setminus E}{}^{\prec u}(t))$ *(en particulier,* $\mathsf{m}(\overline{t}/u) = k+1$*).*

Nous étendons cette définition aux substitutions : une substitution $\overline{\sigma}$ est bien marquée pour k si pour tout $x \in \mathcal{V}$, $x\overline{\sigma}$ est bien marquée pour k.

Ainsi, un terme $\overline{t}$ est bien marqué pour k si pour chaque branche, il existe $i \geq 1$ tel que la suite des marques qui apparaît en parcourant la branche en allant de la racine vers la feuille et en regardant exclusivement les symboles de $\mathcal{F}$ est de la forme :

- $m_1, m_2, \ldots, m_i$, où $\forall p, m_p \leq k$, si 1) est vérifiée,
- $m_1, m_2 \ldots, m_i, k+1, \ldots, k+j$, où $\forall p, m_p \leq k$, si la condition 2) est vérifiée.

Notons que cette définition étend la définition de terme bien marqué pour k donnée dans le cas linéaire aux termes contenant des E.

Remarque 5.8. *Nous imposons dans la définition de terme bien marqué pour k que les marques au-dessus des variables soient inférieures ou égales à k. Par conséquent, si $\overline{l}$ et $\overline{\sigma}$ sont bien marqués pour k, alors $\overline{l}\overline{\sigma}$ est bien marqué pour k. De même, si $\overline{l}\overline{\sigma}$ est bien marqué pour k, et si $\overline{l}$ est bien marqué pour k, alors $\overline{\sigma}$ est bien marquée pour k.*

Exemple 5.9. *Considérons l'ensemble des termes marqués de l'exemple 2.2 page 15 et $k = 2$. Les termes suivants sont bien marqués pour 2*

$$\mathsf{a},\ \mathsf{a}^1,\ \mathsf{a}^2,\ \mathsf{a}^3,\ x.$$

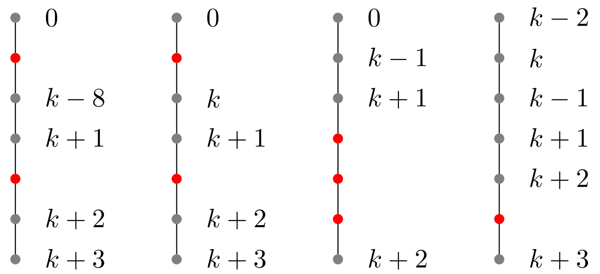

FIGURE 29 – Quatre branches bien marquées pour k (en rouge, les positions des E).

En effet, a, a^1 *et* a^2 *et* x *satisfont 1), et* a^3 *satisfait 2). Par contre,* a^4 *n'est pas bien marqué pour* 2. *Les termes*

$$\mathsf{f}^1(E(\mathsf{a}^2,\mathsf{a}^3)),\ \mathsf{f}^1(E(\mathsf{a}^0,\mathsf{a}^2)),\ \mathsf{f}^2(E(\mathsf{a}^3,\mathsf{a}^3)),\ \mathsf{f}^3(E(\mathsf{a}^4,\mathsf{a}^4))$$

sont bien marqués pour 2. *Par contre, le terme* $\bar{t} = \mathsf{f}^3(E(\mathsf{a}^4,\mathsf{a}^5))$ *n'est pas bien marqué pour* 2. *En effet, la branche* $(\epsilon, 0, 01)$ *ne satisfait pas 1) puisqu'une marque supérieure à* 2 *apparaît. Elle ne satisfait pas non plus 2). En effet, puisque* $\mathsf{m}(\bar{t}) = 3$, *nous devrions avoir :*

$$\mathsf{m}(\bar{t}/01) = \mathsf{Card}(\mathcal{P}\mathsf{os}^{\prec 01}_{\setminus\{E\}}(t)) - \mathsf{Card}(\mathcal{P}\mathsf{os}^{\prec \mathcal{E}}_{\setminus\{E\}}(t)) + 2 + 1 = 4.$$

Or,

$$\mathsf{m}(\bar{t}/01) = \mathsf{m}(\mathsf{a}^5) = 5.$$

Lorsqu'une variable est présente dans un terme bien marqué pour k*, toutes les marques au-dessus doivent être inférieures ou égales à* k*. Les termes suivants sont bien marqués pour* 2

$$x,\ \mathsf{f}^2(x),\ \mathsf{f}^2(E(\mathsf{f}^3(\mathsf{a}^4),\mathsf{f}^2(y))),\ \mathsf{f}^2(E(\mathsf{a}^2,y)).$$

Et ceux-ci ne sont pas bien marqués pour 2

$$\mathsf{f}^4(x),\ \mathsf{f}^3(E(\mathsf{f}^4(\mathsf{a}^5),\mathsf{f}^4(y))),\ \mathsf{f}^3(E(\mathsf{a}^2,y)).$$

Nous avons représenté sur la figure 29 quatre branches bien marquées pour k, et sur la figure 30 trois branches qui sont mal marquées pour k (en considérant que les marques qui apparaissent sont toutes positives ou nulles).

Définition 5.10 (Dérivation bien marquée pour k)**.** *Une dérivation est* **bien marquée pour** $\boldsymbol{k}$ *si tous les termes qui apparaissent dans cette dérivation sont bien marqués pour* k.

Nous allons démontrer que toute dérivation qui commence par un terme bien marqué pour k est bien marquée pour k. Nous allons nous servir du lemme suivant.

Lemme 5.11. *Soit* $\bar{t} \in \overline{\mathcal{T}}_E(\mathcal{V})$ *un terme bien marqué pour* k *et* $n \in \{0, \ldots, k+1\}$. *Le terme*

$$\bar{t} \odot n \text{ est bien marqué pour } k.$$

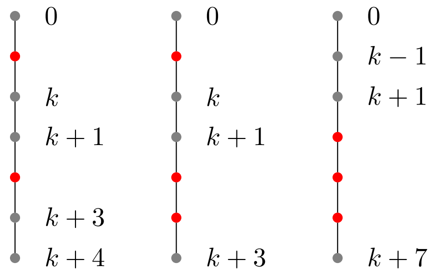

FIGURE 30 – Trois branches mal marquées pour k
(en rouge, les positions des E).

Démonstration. Le raisonnement est similaire à celui utilisé dans la preuve du lemme 3.16 page 3.16. Soit $w \in \mathcal{L}\mathsf{v}(t)$. Comme le terme $\bar{t}$ est bien marqué pour k, la branche aboutissant sur w dans $\bar{t}$ satisfait la condition 1)

$$(\forall u' \preceq w, \mathsf{m}(\bar{t}/u) \leq k)$$

ou la condition 2) (il existe $u' \in \mathcal{P}\mathsf{os}_{\mathcal{F}}{}^{\preceq w}(t)$, tel que

— $\forall v \prec u', \mathsf{m}(\bar{t}/v) \leq k$,

— $\forall v \in \mathcal{P}\mathsf{os}_{\mathcal{F}}{}^{\succeq u'}(t), \mathsf{m}(\bar{t}/v) = k + 1 + \mathsf{Card}(\mathcal{P}\mathsf{os}_{\setminus E}{}^{\prec v}(t)) - \mathsf{Card}(\mathcal{P}\mathsf{os}_{\setminus E}{}^{\prec u'}(t))$ (en particulier, $\mathsf{m}(\bar{t}/u') = k + 1$))

de la définition 5.7. Montrons que la branche aboutissant sur w dans $\bar{t} \odot n$ satisfait l'une des deux conditions de la définition 5.7. Rappelons que par définition,

$$\forall u \in \mathcal{P}\mathsf{os}_{\setminus E}(t),\ \mathsf{m}(\bar{t} \odot n/u) = \max(\mathsf{m}(\bar{t}/u), \mathsf{Card}(\mathcal{P}\mathsf{os}_{\setminus E}{}^{\prec u}(t)) + n).$$

Deux cas peuvent se produire.

1. Soit il existe $u \in \mathcal{P}\mathsf{os}_{\setminus E}{}^{\preceq w}(t)$ tel que $\mathsf{Card}(\mathcal{P}\mathsf{os}_{\setminus E}{}^{\prec u}(t)) = k + 1 - n$. Dans ce cas, pour tout $v \in \mathcal{P}\mathsf{os}_{\setminus E}{}^{\preceq u}(t)$, il existe $m \leq k$ tel que
$$\mathsf{m}(\bar{t} \odot n/v) = \max(\mathsf{m}(\bar{t}/v), m),$$
et pour tout $v \in \mathcal{P}\mathsf{os}_{\setminus E}{}^{\succeq u}(t)$,
$$\mathsf{m}(\bar{t} \odot n/v) = \max(\mathsf{m}(\bar{t}/v), k + 1 + \mathsf{Card}(\mathcal{P}\mathsf{os}_{\setminus E}{}^{\prec v}(t)) - \mathsf{Card}(\mathcal{P}\mathsf{os}_{\setminus E}{}^{\prec u}(t))).$$
   — Si la branche aboutissant sur w dans $\bar{t}$ satisfait la condition 1) de la définition 5.7, alors la branche aboutissant sur w dans $\bar{t} \odot n$ satisfait la condition 2) de la définition 5.7 (avec $\mathsf{m}(\bar{t} \odot n/u) = k + 1$).
   — Si cette branche satisfait la condition 2) de la définition 5.7, alors il existe $u' \in \mathcal{P}\mathsf{os}_{\setminus E}{}^{\preceq w}(t)$, tel que
      — $\forall v \prec u'$, $\mathsf{m}(\bar{t}/v) \leq k$,
      — $\forall v \in \mathcal{P}\mathsf{os}_{\setminus E}{}^{\succeq u'}(t)$, $\mathsf{m}(\bar{t}/v) = k + 1 + \mathcal{P}\mathsf{os}_{\setminus E}{}^{\prec v}(t) - \mathcal{P}\mathsf{os}_{\setminus E}{}^{\prec u'}(t)$.
   Si $u' \preceq u$, alors pour tout $v \preceq w$,
   $$\mathsf{m}(\bar{t} \odot n/v) = \mathsf{m}(\bar{t}/v),$$
   et puisque $\bar{t}$ est bien marqué, la branche aboutissant sur w dans $\bar{t} \odot n$ satisfait la condition 2) de la définition 5.7 (avec $\mathsf{m}(\bar{t} \odot n/u') = k + 1$). Si par contre $u' \succ u$, alors pour tout $v \preceq w$,

— si $v \prec u$, $\mathsf{m}(\bar{t} \odot n/v) \leq k$,

— et si $v \in \mathcal{P}\mathsf{os}_{\backslash E}{}^{\succeq u}(t)$, $\mathsf{m}(\bar{t} \odot n/v) = k + 1 + \mathcal{P}\mathsf{os}_{\backslash E}{}^{\prec v}(t) - \mathcal{P}\mathsf{os}_{\backslash E}{}^{\prec u}(t)$.

La branche aboutissant sur w dans $\bar{t} \odot n$ satisfait la condition 2) de la définition 5.7.

2. Soit pour tout $u \in \mathcal{P}\mathsf{os}_{\backslash E}{}^{\preceq w}(t)$, $\mathsf{Card}(\mathcal{P}\mathsf{os}_{\backslash E}{}^{\prec u}(t)) < k + 1 - n$. Dans ce cas, pour tout $u \in \mathcal{P}\mathsf{os}_{\backslash E}{}^{\preceq w}(t)$, il existe $m \leq k$ tel que

$$\mathsf{m}(\bar{t} \odot n/u) = \max(\mathsf{m}(\bar{t}/u), m).$$

— Si la branche aboutissant sur w dans $\bar{t}$ satisfait la condition 1) de la définition 5.7, alors la branche aboutissant sur w dans $\bar{t} \odot n$ satisfait la condition 1) de la définition 5.7.

— Si cette branche satisfait la condition 2) de la définition 5.7, alors la branche aboutissant sur w dans $\bar{t} \odot n$ satisfait la condition 2) de la définition 5.7 (en considérant la même position u').

□

Proposition 5.12. *Toute dérivation commençant par un terme bien marqué pour k et qui est $\mathsf{bo}(k)$ est bien marquée pour k. Par conséquent, toute dérivation marquée associée à une dérivation $\mathsf{bo}(k)$ est bien marquée pour k.*

Démonstration. Soit un pas de réécriture commençant par un terme $\bar{s}$ bien marqué pour k

$$\bar{s} = \bar{s}[\bar{l}\bar{\sigma}]_v \ {}_{\mathsf{bo}(k)}{\circ\!\!\longrightarrow}_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}} \ \bar{t} = \bar{s}[r(\bar{\sigma} \odot a)]_v,$$

avec $a = 0$ si $l \to r \in \mathcal{E}$, et $a = 1$ si $l \to r \in \mathcal{R}$. Montrons que $\bar{t}$ est bien marqué pour k. Nous distinguons deux cas.

— **cas 1 : $\forall u \prec v, \mathsf{m}(\bar{s}/u) \leq k$.**
Comme $\bar{s}$ est bien marqué pour k, et comme toutes les marques au-dessus de v sont inférieures à k, le terme $\bar{s}[]_v$ est bien marqué pour k (le terme $\bar{s}[]_v$ respecte bien la condition 1) de la définition 5.7 pour la branche aboutissant sur la position v de la variable □). Le terme $\bar{l}\bar{\sigma}$ est lui aussi bien marqué pour k. Comme le pas $\bar{s} \ {}_{\mathsf{bo}(k)}{\circ\!\!\longrightarrow}_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}} \ \bar{t}$ est $\mathsf{bo}(k)$, $\mathsf{mmax}(\bar{l}) \leq k$, et $\bar{l}$ est bien marqué pour k. La substitution $\bar{\sigma}$ est donc elle aussi bien marquée pour k. D'après le lemme 5.11, $\bar{\sigma} \odot a$ est bien marquée pour k. Le terme $r \in \mathcal{T}(\mathcal{V})$ a ses marques à 0, et est donc bien marqué pour k. Ainsi, $\bar{s}[]_v$, $\bar{\sigma} \odot a$ et r sont bien marqués pour k. Le terme $\bar{t} = \bar{s}[r(\bar{\sigma} \odot a)]_v$ est donc lui aussi bien marqué pour k.

— **cas 2 : $\exists u \prec v, \mathsf{m}(\bar{s}/u) > k$.**
Commençons par montrer que $l \to r \in \mathcal{E}$. Nous ne pouvons pas avoir $l \to r \in \mathcal{R}$. En effet, le pas $\bar{s} \ {}_{\mathsf{bo}(k)}{\circ\!\!\longrightarrow}_{l\to r,v} \ \bar{t}$ est $\mathsf{bo}(k)$ et le terme $\bar{s}$ est bien marqué pour k. Par définition, ces deux conditions réunies impliquent que pour toute position $u \prec v$, $\mathsf{m}(\bar{s}/u) \leq k$. Or nous sommes dans le cas où il existe $u \prec v$ tel que $\mathsf{m}(\bar{s}/u) > k$. Nous avons donc $l \to r \in \mathcal{E}$ et $a = 0$.
Montrons que les branches de $\bar{t}$ qui passent par v satisfont la condition 2) de la définition 5.7. Comme $\bar{s}$ est bien marqué pour k, et comme $\mathsf{m}(\bar{s}/u) > k$, il existe $u' \preceq u$, tel que

— $\forall w \prec u'$, $\mathsf{m}(\bar{s}/w) \leq k$,

— $\forall w \in \mathcal{P}\mathsf{os}_{\mathcal{F}}{}^{\succeq u'}(s)$,

$$\mathsf{m}(\overline{s}/w) = k + 1 + \mathsf{Card}(\mathcal{P}\mathsf{os}_{\backslash E}{}^{\prec w}(s)) - \mathsf{Card}(\mathcal{P}\mathsf{os}_{\backslash E}{}^{\prec u'}(s)).$$

Nous avons donc

$$\forall w \prec u',\ \mathsf{m}(\overline{t}/w) = \mathsf{m}(\overline{s}/w) \leq k.$$

Soit $w \in \mathcal{P}\mathsf{os}_{\mathcal{F}}{}^{\succeq u'}(t)$.

1. Si $w \prec v$ ou $w \perp v$, alors

$$\mathsf{Card}(\mathcal{P}\mathsf{os}_{\backslash E}{}^{\prec w}(s)) = \mathsf{Card}(\mathcal{P}\mathsf{os}_{\backslash E}{}^{\prec w}(t)),$$

   et

$$\mathsf{Card}(\mathcal{P}\mathsf{os}_{\backslash E}{}^{\prec u'}(s)) = \mathsf{Card}(\mathcal{P}\mathsf{os}_{\backslash E}{}^{\prec u'}(t)).$$

   Nous avons donc :

$$\begin{aligned}\mathsf{m}(\overline{t}/w) = \mathsf{m}(\overline{s}/w) &= k + 1 + \mathsf{Card}(\mathcal{P}\mathsf{os}_{\backslash E}{}^{\prec w}(s)) - \mathsf{Card}(\mathcal{P}\mathsf{os}_{\backslash E}{}^{\prec u'}(s))\\ &= k + 1 + \mathsf{Card}(\mathcal{P}\mathsf{os}_{\backslash E}{}^{\prec w}(t)) - \mathsf{Card}(\mathcal{P}\mathsf{os}_{\backslash E}{}^{\prec u'}(t)).\end{aligned}$$

2. Sinon, $w \succeq v$, et il existe $x \in \mathcal{V}\mathsf{ar}(r)$, $w_1 \in \mathcal{P}\mathsf{os}(r, x)$, $w_2 \in \mathcal{P}\mathsf{os}(x\sigma)$ tels que $w = v \cdot w_1 \cdot w_2$. De plus, comme $r \in \{x, E(x, y)\}$ (puisque $l \to r \in \mathcal{E}$),

$$\mathsf{Card}(\mathcal{P}\mathsf{os}_{\backslash E}{}^{\prec w}(t)) = \mathsf{Card}(\mathcal{P}\mathsf{os}_{\backslash E}{}^{\prec w'}(s)),$$

   où $w' = v \cdot \mathsf{pos}(l, x) \cdot w_2$ est l'origine de w dans s. Nous avons donc

$$\begin{aligned}\mathsf{m}(\overline{t}/w) &= \max(\mathsf{m}(\overline{s}/w'), \mathsf{Card}_{\backslash E}^{\prec w_2}(x\sigma))\\ &= \max(k + 1 + \mathsf{Card}(\mathcal{P}\mathsf{os}_{\backslash E}{}^{\prec w'}(s)) - \mathsf{Card}(\mathcal{P}\mathsf{os}_{\backslash E}{}^{\prec u'}(s)), \mathsf{Card}_{\backslash E}^{\prec w_2}(x\sigma)).\end{aligned}$$

   Puisque $u' \prec v$ et $w' = v \cdot \mathsf{pos}(l, x) \cdot w_2$,

$$\mathsf{Card}(\mathcal{P}\mathsf{os}_{\backslash E}{}^{\prec w'}(s)) - \mathsf{Card}(\mathcal{P}\mathsf{os}_{\backslash E}{}^{\prec u'}(s)) > \mathsf{Card}_{\backslash E}^{\prec w_2}(x\sigma),$$

   et nous avons

$$\begin{aligned}\mathsf{m}(\overline{t}/w) &= k + 1 + \mathsf{Card}(\mathcal{P}\mathsf{os}_{\backslash E}{}^{\prec w'}(s)) - \mathsf{Card}(\mathcal{P}\mathsf{os}_{\backslash E}{}^{\prec u'}(s))\\ &= k + 1 + \mathsf{Card}(\mathcal{P}\mathsf{os}_{\backslash E}{}^{\prec w}(t)) - \mathsf{Card}(\mathcal{P}\mathsf{os}_{\backslash E}{}^{\prec u'}(t)).\end{aligned}$$

Ainsi, dans $\overline{t}$, toutes les branches qui passent par v respectent la condition 2) de la définition 5.7. Comme $\overline{s}$ est bien marqué pour k, cela suffit à montrer que $\overline{t}$ est lui aussi bien marqué pour k.

Nous avons montré que toute dérivation commençant par un terme bien marqué pour k et qui est $\mathsf{bo}(k)$ est bien marquée pour k. Par définition, une dérivation marquée associée débute par un terme dont toutes les marques sont à 0. Ce terme est donc bien marqué pour tout $k \in \mathbb{N}$. Par conséquent, toute dérivation marquée associée à une dérivation $\mathsf{bo}(k)$ est bien marquée pour k. □

5.2.5 $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R} \cup \mathcal{E}$ sont équivalents

L'objectif de cette section est de démontrer que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R} \cup \mathcal{E}$ sont équivalents sur $\mathcal{T}$, c'est-à-dire que pour tous termes $s, t \in \mathcal{T}$,

$$s \to_{\mathcal{R}}^{*} t \Leftrightarrow s \to_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}}^{*} t. \tag{5.8}$$

L'implication $\Rightarrow$ est triviale. Pour démontrer la réciproque de cette équivalence, nous allons introduire pour tout terme $\bar{t} \in \overline{\mathcal{T}}_E$ la notion de **terme représenté par $\bar{t}$**. Un terme **$\bar{s} \in \overline{\mathcal{T}}$ est représenté par $\bar{t}$** s'il est possible d'obtenir $\bar{s}$ à partir de $\bar{t}$ en utilisant uniquement des règles de sélection. Nous notons $\mathsf{Rep}(\bar{t})$ l'ensemble des termes représentés par $\bar{t}$

$$\mathsf{Rep}(\bar{t}) = \{\bar{s} \in \overline{\mathcal{T}} \mid \bar{t} \to_{E(x,y)\to x|y}^{*} \bar{s}\}.$$

(Notons que nous utilisons la réécriture standard $\to$ sur la signature $\mathcal{F}^{\mathbb{N}} \cup \{E\}$, et pas la réécriture marquée $\circ\!\!\to$.) Nous allons démontrer que pour tous termes $s, t \in \mathcal{T}_E$, si $s \to_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}} t$, alors pour tout représentant t' de t il existe un représentant s' de s tel que $s' \to_{\mathcal{R}}^{*} t'$. Ce résultat aura pour corollaire la réciproque $\Leftarrow$ de l'équivalence 5.8 qu'il nous reste à démontrer.

Lemme 5.13. *Soient $s, t \in \mathcal{T}_E$ tels que $s \to_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}} t$. Soit $t' \in \mathsf{Rep}(t)$. Il existe $s' \in \mathsf{Rep}(s)$ tel que*

$$s' \to_{\mathcal{R}}^{*} t'.$$

Démonstration. Soient $s, t \in \mathcal{T}_E$, $t' \in \mathsf{Rep}(t)$ tels que

$$s \to_{l\to r, \mathcal{R}\cup\mathcal{E}, \sigma, v} t,$$

et

$$t \to_{E(x,y)\to x|y}^{n} t'.$$

Nous raisonnerons sur n la longueur de cette dérivation . Si $n = 0$, alors t ne contient pas de symbole E et $\mathsf{Rep}(t) = \{t\}$. Le terme s peut par contre lui contenir des symboles E, mais uniquement dans la partie correspondant à la substitution. Toutefois, comme t ne contient pas de E, pour toute variable $x \in \mathcal{V}\mathsf{ar}(r)$, $x\sigma \in \mathcal{T}$. Définissons la substitution σ' par

- pour tout $x \in \mathcal{V}\mathsf{ar}(r)$, $x\sigma' = x\sigma$,
- pour tout $x \in \mathcal{V}\mathsf{ar}(l) \backslash \mathcal{V}\mathsf{ar}(r)$, $x\sigma' = x\tau$, où $x\tau \in \mathsf{Rep}(x\sigma)$ est un terme représenté par $x\sigma$.

Le terme $s[l\sigma']_v \in \mathsf{Rep}(s)$ et il y a une dérivation

$$s[l\sigma']_v \to_{l\to r, \sigma', v} t.$$

Le résultat est vérifié pour $n = 0$.
Soit $n > 0$. Soit t_1 tel que

$$t \to_{E(x,y)\to x, v_1} t_1 \to_{E(x,y)\to x|y}^{n-1} t'.$$

(Nous supposons que la première règle employée est $E(x, y) \to x$, mais le cas $E(x, y) \to y$ est similaire). Nous distinguons 3 cas.

— **cas 1 : $\boldsymbol{v_1 \perp v}$ ou $\boldsymbol{v_1 \succ v}$.**
Dans ce cas, il existe s_1 tel que

$$s \to_{E(x,y)\to x, v_1'} s_1 \to_{l\to r, v} t_1 \to^{n-1}_{E(x,y)\to x|y} t',$$

où v_1' est l'origine de v_1 dans s en considérant le pas $s \to_{l\to r,v} t$ (v_1' est bien défini puisque $r \in \mathcal{T}(\mathcal{V})$). Par hypothèse de récurrence sur

$$t_1 \to^{n-1}_{E(x,y)\to x|y} t', \text{ et } s_1 \to_{l\to r,v} t_1,$$

il existe $s' \in \mathsf{Rep}(s_1)$ tel que

$$s' \to^*_{\mathcal{R}} t'.$$

Comme

$$s \to_{E(x,y)\to x, v_1'} s_1 \to^*_{E(x,y)\to x|y} s',$$

$s' \in \mathsf{Rep}(s)$ et le résultat est vérifié.

— **cas 2 : $\boldsymbol{v_1 \prec v}$**
Dans ce cas il existe une substitution τ et un terme s_1 tel que

$$s \to_{E(x,y)\to x, v_1, \tau} s_1 = s[x\tau]_{v_1}.$$

Nous distinguons 2 cas.

 — Si $\exists w \in \mathcal{P}\mathsf{os}(x\tau)$ tel que $v = v_1 \cdot 0 \cdot w$, alors

$$s_1 = s[x\tau[l\sigma]_w]_{v_1}, t_1 = t[x\tau[r\sigma]_w]_{v_1},$$

 et nous avons une dérivation

$$s_1 \to_{l\to r, v_1\cdot w} t_1.$$

 Par hypothèse de récurrence sur

$$s_1 \to_{l\to r,v} t_1 \text{ et } t_1 \to^{n-1}_{E(x,y)\to x|y} t',$$

 il existe $s' \in \mathsf{Rep}(s_1)$ tel que

$$s' \to^*_{\mathcal{R}} t'.$$

 Comme $s \to_{E(x,y)\to x, v_1} s_1 \to^*_{E(x,y)\to x|y} s'$, $s' \in \mathsf{Rep}(s)$ et le résultat est vérifié.

 — Sinon, $\exists w \in \mathcal{P}\mathsf{os}(y\tau)$ tel que $v = v_1 \cdot 1 \cdot w$, et nous avons

$$s_1 = s[y\tau]_{v_1} = t_1.$$

 Nous avons donc

$$s \to_{E(x,y)\to x} s_1 = t_1 \to^{n-1}_{E(x,y)\to x} t',$$

 et $t' \in \mathsf{Rep}(s)$. Le résultat est vérifié en choisissant $s' = t'$.

— **cas 3 : $\boldsymbol{v = v_1}$.**

— Si $l \to r \in \{E(x,y) \to x, E(x,y) \to y\}$, alors $t' \in \mathsf{Rep}(s)$ et le résultat est vérifié.

— Si $l \to r = x \to E(x,x)$, alors $s = t_1$ et le résultat est vérifié en prenant $t' \in \mathsf{Rep}(s)$.

— Si $l \to r \in \mathcal{R}$ alors, puisque $v \in \mathcal{P}\mathsf{os}_E(t)$, et $r \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$, nécessairement il existe $x_0 \in \mathcal{V}\mathsf{ar}(l)$ tel que $r = x_0$. De plus,

$$s = s[l\sigma]_v, t = s[x_0\sigma]_v, \text{ et } t_1 = s[x_0\sigma/0].$$

Soit τ la substitution définie par

— $x_0\tau = x_0\sigma/0$,

— $\forall x \neq x_0, x\tau = x\sigma$.

Nous avons

$$s = s[l\sigma[E(x_0\tau, x_0\sigma/1)]_{\mathsf{pos}(l,x_0)}]_v \to_{E(x,y)\to x, v\cdot\mathsf{pos}(l,x_0)} s_1 = s[l\tau]_v$$
$$\to_{l\to x_0} t_1 = s[x_0\tau]_v.$$

Par hypothèse de récurrence sur

$$s_1 \to_{l\to x_0, v} t_1 \text{ et } t_1 \to^{n-1}_{E(x,y)\to x|y} t',$$

il existe $s' \in \mathsf{Rep}(s_1)$ tel que

$$s' \to^*_{\mathcal{R}} t'.$$

Comme

$$s \to_{E(x,y)\to x} s_1 \to^*_{E(x,y)\to x|y} s',$$

$s' \in \mathsf{Rep}(s)$ et le résultat est vérifié.

$\square$

Nous sommes maintenant prêts à démontrer que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R} \cup \mathcal{E}$ sont équivalents.

Proposition 5.14. *Pour tous $s, t \in \mathcal{T}$,*

$$s \to^*_{\mathcal{R}} t \Leftrightarrow s \to^*_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}} t.$$

Démonstration. ($\Rightarrow$) : trivial.
($\Leftarrow$) : Soit $d : s \to^*_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}} t$. D'après le lemme 5.13, pour tout $t' \in \mathsf{Rep}(t)$, il existe $s' \in \mathsf{Rep}(s)$ tel que $s' \to^*_{\mathcal{R}} t'$. Comme $s, t \in \mathcal{T}$, $\mathsf{Rep}(s) = \{s\}$ et $\mathsf{Rep}(t) = \{t\}$. Le résultat est vérifié. $\square$

5.3 Simulation

5.3.1 Présentation de la section

Pour démontrer la i-préservation de la reconnaissabilité pour la réécriture $\mathsf{bo}(k)$, nous allons montrer que nous pouvons simuler les dérivations $\mathsf{bo}(k)$ à l'aide d'un TTC. Cette simulation se fait en deux étapes :

— Nous définissons d'abord la partie utile $\mathsf{Top}_k(\overline{t})$ d'un terme bien marqué $\overline{t}$. C'est la seule partie pouvant être réécrite par une règle de $\mathcal{R}$ dans une dérivation $\mathsf{bo}(k)$.

— Puis, nous définissons un TTC $\mathcal{G}$ qui a les propriétés suivantes :
- Si $\overline{s} \to_{\mathcal{G}}^* \overline{t}$, alors il existe $\overline{t'}$ tel que $\overline{s} \;{}_{\mathsf{bo}(k)}\!\circ\!\!\to_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}}^* \overline{t'} \to_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{+\mathbb{N}}}^* \overline{t}$ (relèvement de $\mathcal{G}$ à $\mathcal{R}$), où $\mathcal{A}_{\mathcal{P}^+}{}^{\mathbb{N}}$ est un automate construit à partir de $\mathcal{A}$ et permettant de manier les E.
- Si $\overline{s} \;{}_{\mathsf{bo}(k)}\!\circ\!\!\to_{\mathcal{R}}^* \overline{t}$ alors $\mathsf{Top}_k(\overline{s}) \to_{\mathcal{G}}^* \mathsf{Top}_k(\overline{t})$ (projection de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{G}$),

— De ces deux propriétés de $\mathcal{G}$ découle le lemme de simulation 5.55 page 151. La relation $\to_{\mathcal{G}}^*$ est reconnaissable par un TTC, et puisque les TTCs i-préservent la reconnaissabilité, nous déduirons de cette simulation le résultat d'i-préservation.

5.3.2 L'automate $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$

L'automate $\mathcal{A}_{\mathcal{P}} = (\mathcal{F}, \mathcal{Q}, \mathcal{Q}_f, \Gamma)$ peut être vu comme une extension de $\mathcal{A}$ aux termes contenant le symbole E. Cet automate fonctionne un peu comme l'automate des parties en interprétant le symbole E comme une "union".

Définition 5.15. *Nous définissons l'automate (fini, déterministe et complet sur $\mathcal{F} \cup \{E\}$) $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ construit à partir de $\mathcal{A}$ par :*

$$\mathcal{A}_{\mathcal{P}} := (\mathcal{F} \cup \{E\}, \mathcal{Q}_{\mathcal{P}}, \mathcal{Q}_{f,\mathcal{P}}, \Gamma_{\mathcal{P}}),$$

où $\mathcal{Q}_{\mathcal{P}} = \mathcal{P}(\mathcal{Q}), \mathcal{Q}_{f,\mathcal{P}} = \{\{q\} \mid q \in \mathcal{Q}_f\}$, et

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mathcal{P}} =&\{E(S_1, S_2) \to S_1 \cup S_2 \mid S_1, S_2 \in \mathcal{Q}_{\mathcal{P}}\}\\ &\cup \{f(S_1, \ldots, S_n) \to S_{f(S_1,\ldots,S_n)} \mid f \in \mathcal{F}_n, S_1, \ldots, S_n \in \mathcal{Q}_{\mathcal{P}}\},\end{aligned}$$

avec

$$S_{f(S_1,\ldots,S_n)} = \{q \in \mathcal{Q} \mid \exists s_1 \in S_1, \ldots, \exists s_n \in S_n \text{ tels que } f(s_1, \ldots, s_n) \to q \in \Gamma\}.$$

Nous définissons aussi l'automate

$$\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^+ := (\mathcal{F} \cup \{E\}, \mathcal{Q}_{\mathcal{P}}, \mathcal{Q}_{f,\mathcal{P}}, \Gamma_{\mathcal{P}}^+)$$

obtenu à partir de $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ en ajoutant les règles de sélection d'états $S \to S'$, pour $S, S' \in \mathcal{Q}_{\mathcal{P}}, S' \subset S$:

$$\Gamma_{\mathcal{P}}^+ := \Gamma_{\mathcal{P}} \cup \{S \to S' \mid S, S' \in \mathcal{Q}_{\mathcal{P}}, S' \subset S\}.$$

Notons que l'automate $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ contient les règles $c \to \{q\}$ pour $c \in \mathcal{F}_0, c \to q \in \Gamma$. Il est déterministe et complet. L'automate $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^+$ est complet mais n'est pas déterministe (à cause des règles $S \to S'$ pour $S' \subset S$). Les automates marqués associés $(\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{k,k'}, \mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{\mathbb{N}}, \ldots)$ sont aussi déterministes et complets pour les signatures associées. Notons T le langage reconnu par l'automate $\mathcal{A}$. L'automate $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ reconnaît le même langage que $\mathcal{A}$. L'automate $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^+$ reconnaît tous les termes $t \in \mathcal{T}_E$ qui peuvent se réduire à un terme $t' \in T$ en utilisant les règles de sélection, i.e. $\mathcal{L}(\mathcal{A}_{\mathcal{P}}{}^+) = (\to_{\{E(x,y)\to x, E(x,y)\to y\}}^*)[T]$. Rappelons que pour un automate $\mathcal{B}$, l'automate marqué associé $\mathcal{B}^{\mathbb{N}}$ fonctionne comme l'automate $\mathcal{B}$ en supprimant les marques (voir les préliminaires section 2.12.2 page 23). Nous allons utiliser l'automate ${\mathcal{A}_{\mathcal{P}}}^{\geq k+1}$ pour définir le top d'un terme bien marqué pour k. L'automate $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{+\mathbb{N}}$ servira pour la simulation, et tient le rôle qui était imparti à l'automate $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ dans le cas linéaire.

Exemple 5.16. *Considérons l'automate* $\mathcal{A} = (\mathcal{F}, \mathcal{Q}, \mathcal{Q}_f, \Gamma)$*, où* $\mathcal{F}$ *est la signature définie dans l'exemple 2.2* $\mathcal{F} = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{f}, \mathsf{g}, \mathsf{i}, \mathsf{h}\}$*,* $\mathcal{Q} = \{q, q_f\}$*,* $\mathcal{Q}_f = \{q_f\}$ *et* $\Gamma = \{\mathsf{a} \to q_f, \mathsf{b} \to q, \mathsf{c} \to q, \mathsf{f}(q_f) \to q_f, \mathsf{i}(q_f) \to q_f, \mathsf{h}(q_f, q_f) \to q_f, \mathsf{g}(q_f) \to q_f, \mathsf{f}(q) \to q, \mathsf{g}(q) \to q, \mathsf{i}(q) \to q, \mathsf{h}(q, q) \to q, \mathsf{h}(q, q_f) \to q, \mathsf{h}(q_f, q) \to q\}$*. Cet automate accepte tous les termes dont les feuilles sont des symboles* a*. Parmi les règles de* $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ *il y a les règles suivantes*

$$\begin{aligned}
&\mathsf{a} \to \{q_f\}\\
&\mathsf{c} \to \{q\}\\
&\mathsf{f}(\{q_f, q\}) \to \{q_f, q\}\\
&\mathsf{h}(\{q, q_f\}, \{q\}) \to \{q\}\\
&\mathsf{h}(\{q_f\}, \{q, q_f\}) \to \{q_f, q\}\\
&E(\{q\}, \{q\}) \to \{q\}\\
&E(\{q_f, q\}, \{q\}) \to \{q_f, q\}\\
&E(\{q\}, \{q_f\}) \to \{q_f, q\}.
\end{aligned}$$

Par contre les règles suivantes n'appartiennent pas à $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$

$$\begin{aligned}
&\mathsf{a} \to \{q_f, q\}\\
&\mathsf{c} \to \{q_f\}\\
&\mathsf{f}(\{q_f, q\}) \to \{q_f\}\\
&E(\{q\}, \{q\}) \to \{q_f\}\\
&E(\{q_f, q\}, \{q\}) \to \{q\}
\end{aligned}$$

L'automate ${\mathcal{A}_{\mathcal{P}}}^{+}$ *contient en plus des règles de* $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ *les deux règles suivantes*

$$\begin{aligned}
&\{q_f, q\} \to \{q_f\}\\
&\{q_f, q\} \to \{q\}.
\end{aligned}$$

Notations

Dans toute la fin de ce chapitre, nous noterons $\odot$ ce qui devrait être noté $\odot_{\setminus\{E\}\cup\mathcal{Q}_{\mathcal{P}}}$ afin d'alléger l'écriture. Nous notons $\boldsymbol{\overline{\mathcal{T}}(E \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{P}}, \mathcal{V})}$ l'ensemble $\mathcal{T}(\mathcal{F}^{\mathbb{N}} \cup \{E\} \cup \mathcal{Q}, \mathcal{V})$ et $\boldsymbol{\overline{\mathcal{T}}(E \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{P}})}$ l'ensemble $\mathcal{T}(\mathcal{F}^{\mathbb{N}} \cup \{E\} \cup \mathcal{Q})$. Nous utiliserons aussi de manière implicite les lemmes 2.7 page et 2.8 page 17 à savoir :

— Pour tout terme $\overline{s} \in \overline{\mathcal{T}}(E \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{P}}, \mathcal{V})$, et tous entiers $n, m \in \mathbb{N}$

$$(\overline{s} \odot n) \odot m = \overline{s} \odot \max(n, m).$$

— Pour tous $\overline{s} \in \overline{\mathcal{T}}(E \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{P}}, \mathcal{V})$, $u \in \mathcal{P}\mathsf{os}(s)$, $n \in \mathbb{N}$ nous avons

$$\overline{s} \odot n/u = \overline{s}/u \odot (\mathsf{Card}({\mathcal{P}\mathsf{os}_{\setminus E}}^{\prec u}(\overline{s})) + n).$$

Nous utiliserons aussi une extension (triviale) de la relation de réécriture $\circ\!\!\rightarrow_{\mathcal{E}}$ pour la faire agir sur les termes contenant des états $Q \in \mathcal{Q_P}$. Pour deux termes $\overline{s}, \overline{t} \in \overline{\mathcal{T}}(E \cup \mathcal{Q_P})$ nous noterons (en utilisant nos notations)

$$\overline{s} \circ\!\!\rightarrow_{\mathcal{E}} \overline{t}$$

s'il existe une règle $l \to r \in \mathcal{E}$, une position $v \in \mathcal{P}\mathsf{os}(s)$ et une substitution $\overline{\sigma}$ tels que

$$\overline{s} = \overline{s}[l\overline{\sigma}]_v, \overline{t} = \overline{s}[r(\overline{\sigma} \odot 0)]_v.$$

Lemme 5.17. *Soient* $\overline{s}, \overline{t} \in \overline{\mathcal{T}}(E \cup \mathcal{Q_P}, \mathcal{V}), n \in \mathbb{N}$ *tels que*

$$\overline{s} \odot n \rightarrow^*_{\mathcal{A_P}^{\mathbb{N}}} \overline{t}.$$

Il existe $\overline{t'} \in \overline{\mathcal{T}}(E \cup \mathcal{Q_P}, \mathcal{V})$ *tel que*

$$\overline{s} \rightarrow^*_{\mathcal{A_P}^{\mathbb{N}}} \overline{t'} \text{ et } \overline{t'} \odot n = \overline{t}$$

Démonstration. Comme $\overline{s} \odot n \rightarrow^*_{\mathcal{A_P}^{\mathbb{N}}} \overline{t}$, $\overline{t}$ est de la forme

$$\overline{t} = \overline{s} \odot n[Q_1, \ldots, Q_p]_{v_1,\ldots,v_p}$$

avec $Q_1, \ldots, Q_p \in \mathcal{Q_P}$. Il suffit donc de choisir

$$\overline{t'} = \overline{s}[Q_1, \ldots, Q_p]_{v_1,\ldots,v_p}$$

pour conclure. □

5.3.3 $\mathcal{A_P}$ et le système $\mathcal{E}$

Pour un terme $\overline{s} \in \overline{\mathcal{T}}_E$, tout état contenu dans $\overline{s} \downarrow_{\mathcal{A_P}^{\mathbb{N}}}$ est la forme normale d'un terme représenté par $\overline{s}$ en considérant $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ (voir la page 119 pour la notion de terme représenté). Nous nous en servirons dans la preuve du lemme de simulation.

Lemme 5.18. *Soient* $\overline{s} \in \overline{\mathcal{T}}_E$. *Pour tout* $q \in \overline{s} \downarrow_{\mathcal{A_P}^{\mathbb{N}}}$, *il existe* $\overline{s'} \in \overline{\mathcal{T}}$ *tel que*

$$\overline{s} \circ\!\!\rightarrow^*_{\{E(x,y)\to x, E(x,y)\to y\}} \overline{s'} \rightarrow^+_{\mathcal{A}^{\mathbb{N}}} q.$$

Démonstration. L'automate $\mathcal{A_P}^{\mathbb{N}}$ est déterministe et complet puisque $\mathcal{A}$ est déterministe et complet. Nous démontrons ce résultat par récurrence sur n la longueur de la dérivation

$$\overline{s} \rightarrow^n_{\mathcal{A_P}^{\mathbb{N}}} \overline{s} \downarrow_{\mathcal{A_P}^{\mathbb{N}}} .$$

Par définition de $\mathcal{A_P}^{\mathbb{N}}$, $n > 0$. Soit

$$Q = \overline{s} \downarrow_{\mathcal{A_P}^{\mathbb{N}}} .$$

Si $n = 1$, alors il existe $c \in \mathcal{F}_0, i \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathcal{Q}$, tels que

$$\overline{s} = c^i \rightarrow_{\mathcal{A_P}^{\mathbb{N}}} Q = \{q\},$$

et puisque $c \to q \in \Gamma$,

$$\overline{s} = c^i \rightarrow_{\mathcal{A}^{\mathbb{N}}} q.$$

Le résultat est donc vérifié. Soit $n > 1$. Soit $\overline{s_{n-1}}$ tel que

$$\overline{s} \rightarrow^{n-1}_{\mathcal{A_P}^{\mathbb{N}}} \overline{s_{n-1}} \rightarrow_{\mathcal{A_P}^{\mathbb{N}}} Q,$$

et soit $q \in Q$. Nous distinguons 2 cas.

— **cas 1 :** $\exists m > 0, f \in \mathcal{F}_m, Q_0, \ldots, Q_{m-1} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{P}}$
tels que $\overline{s_{n-1}} = f^i(Q_0, \ldots, Q_{m-1})$.
Alors, par définition de $\Gamma_{\mathcal{P}}$, il existe $q_0 \in Q_0, \ldots, q_{m-1} \in Q_{m-1}$ tels que

$$f(q_0, \ldots, q_{m-1}) \to q \in \Gamma.$$

Puisque ${\mathcal{A}_{\mathcal{P}}}^{\mathbb{N}}$ est un automate de bas en haut, pour tout $j \in \{0, \ldots, m-1\}$,

$$\overline{s_{n-1}}/j \to^{\leq n-1}_{{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}}^{\mathbb{N}}} Q_j.$$

Par hypothèse de récurrence sur ces dérivations, pour tout $j \in \{0, \ldots, m-1\}$, il existe $\overline{t_j} \in \overline{\mathcal{T}}$ tel que,

$$\overline{s_{n-1}}/j \circ\!\!\to^*_{\{E(x,y)\to x, E(x,y)\to y\}} \overline{t_j} \to^+_{\mathcal{A}^{\mathbb{N}}} q_j.$$

Nous avons donc une dérivation

$$\overline{s_{n-1}} \circ\!\!\to^*_{\{E(x,y)\to x, E(x,y)\to y\}} f^i(\overline{t_0}, \ldots, \overline{t_{m-1}}) \to^+_{\mathcal{A}^{\mathbb{N}}} f^i(q_0, \ldots, q_{m-1}) \to_{\mathcal{A}^{\mathbb{N}}} q.$$

— **cas 2 :** $\exists Q_0, Q_1 \in \mathcal{Q}_{\mathcal{P}}$ **tels que** $\overline{s_{n-1}} = E(Q_0, Q_1)$**.**
Par définition de $\Gamma_{\mathcal{P}}$, la règle appliquée est

$$E(Q_0, Q_1) \to Q = Q_0 \cup Q_1.$$

Posons $j = 0$ si $q \in Q_0$, et $j = 1$ si $q \in Q_1 \backslash Q_0$. Puisque ${\mathcal{A}_{\mathcal{P}}}^{\mathbb{N}}$ est un automate de bas en haut,

$$\overline{s_{n-1}}/j \to^{\leq n-1}_{{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}}^{\mathbb{N}}} Q_j.$$

Par hypothèse de récurrence, il existe $\overline{t_j} \in \overline{\mathcal{T}}$ tel que

$$\overline{s_{n-1}}/j \circ\!\!\to^*_{\{E(x,y)\to x, E(x,y)\to y\}} \overline{t_j} \to^+_{\mathcal{A}^{\mathbb{N}}} q.$$

De plus, en utilisant la règle de sélection adéquate, nous obtenons une dérivation

$$\overline{s_{n-1}} \circ\!\!\to_{\{E(x,y)\to x, E(x,y)\to y\}} \overline{s_{n-1}}/j \odot 0.$$

Comme $\overline{s_{n-1}}/j \circ\!\!\to^*_{\{E(x,y)\to x, E(x,y)\to y\}} \overline{t_j}$,

$$\overline{s_{n-1}}/j \odot 0 \circ\!\!\to^*_{\{E(x,y)\to x, E(x,y)\to y\}} \overline{t_j} \odot 0.$$

Par définition de $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, et comme $\overline{t_j} \to^+_{\mathcal{A}^{\mathbb{N}}} q$, nous avons

$$\overline{t_j} \odot 0 \to^+_{\mathcal{A}^{\mathbb{N}}} q.$$

Nous avons construit une dérivation

$$\overline{s_{n-1}} \circ\!\!\to_{\{E(x,y)\to x, E(x,y)\to y\}} \overline{s_{n-1}}/j \odot 0 \circ\!\!\to^*_{\{E(x,y)\to x, E(x,y)\to y\}} \overline{t_j} \odot 0 \to^+_{\mathcal{A}^{\mathbb{N}}} q.$$

$\square$

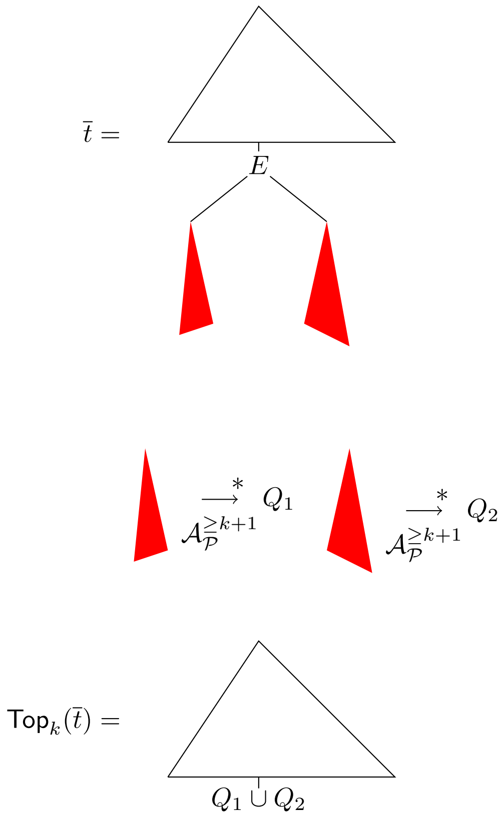

FIGURE 31 – Le terme $\mathsf{Top}_k(\bar{t})$.

5.3.4 Top_k d'un terme

Rappelons que k est un entier fixé. Nous allons définir la partie utile d'un terme $\bar{t}$ dans une dérivation $\mathsf{bo}(k)$. Par définition d'une dérivation $\mathsf{bo}(k)$, un symbole dans un terme $\bar{t}$ ne peut apparaître dans le membre gauche d'une règle de $\mathcal{R}$ que si la marque sur ce symbole est inférieure à k. Le domaine utile est l'ensemble des positions dont les marques situées au-dessus sont toutes inférieures à k.

Définition 5.19. *Soit $\bar{t} \in \overline{\mathcal{T}}(E \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{P}}, \mathcal{V})$ un terme bien marqué pour k. Le* **domaine utile** $\mathsf{Topd}_k(\bar{t})$ *de $\bar{t}$ est l'ensemble des positions*

$$\mathsf{Topd}_k(\bar{t}) := \{u \in \mathcal{P}\mathsf{os}(t) \mid \forall v \prec u, \mathsf{m}(\bar{t}/v) \leq k\}.$$

Comme dans le cas linéaire, le terme $\mathsf{Top}_k(\bar{t})$ est obtenu à partir de $\bar{t}$ en remplaçant les sous-termes inutiles par leurs formes normales en considérant $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{\geq k+1}$ (voir figure 31).

Définition 5.20. *Pour tout terme $\bar{t} \in \overline{\mathcal{T}}(E \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{P}}, \mathcal{V})$ bien marqué pour k nous* *définissons* $\mathsf{Top}_k(\bar{t})$ *comme le réduit de* $\bar{t}$ *à* $\mathsf{Topd}_k(\bar{t})$ *en utilisant* $\mathcal{A_P}^{\geq k+1}$

$$\mathsf{Top}_k(\bar{t}) = \mathsf{Red}_{\mathcal{A_P}^{\geq k+1}}(\bar{t}, \mathsf{Topd}_k(\bar{t})).$$

Comme $\bar{t}$ est bien marqué pour k, et par définition de Top, toutes les marques situées à des positions n'appartenant pas à $\mathsf{Topd}_{\setminus E \cup \mathcal{V}}(\bar{t})$ sont strictement supérieures à $k+1$. Le domaine $\mathsf{Topd}_k(\bar{t})$ est accessible avec l'automate $\mathcal{A_P}^{\geq k+1}$. Comme l'automate est déterministe (contrairement à l'automate $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{+}$), le réduit $\mathsf{Top}_k(\bar{t})$ est bien défini. Pour chaque position $u \in \mathsf{Topd}_{\setminus E}(\bar{t})$, le symbole à cette position reste inchangé dans Top si sa marque est inférieure à k : $\mathsf{m}(\bar{t}/u) \leq k \Rightarrow \mathsf{Top}_k(\bar{t})(u) = \bar{t}(u)$, et il est remplacé par sa forme normale en utilisant $\mathcal{A_P}^{\geq k+1}$ si sa marque vaut $k+1$: $\mathsf{m}(\bar{t}/u) = k+1 \Rightarrow \mathsf{Top}_k(\bar{t})/u = \bar{t}/u\downarrow_{\mathcal{A_P}^{\geq k+1}}$.

Exemple 5.21. *Considérons l'automate* $\mathcal{A}$ *de l'exemple 5.16 ayant pour règles* $\Gamma = \{\mathsf{a} \to q_f, \mathsf{b} \to q, \mathsf{c} \to q, \mathsf{f}(q_f) \to q_f, \mathsf{i}(q_f) \to q_f, \mathsf{h}(q_f, q_f) \to q_f, \mathsf{g}(q_f) \to q_f, \mathsf{f}(q) \to q, \mathsf{g}(q) \to q, \mathsf{i}(q) \to q, \mathsf{h}(q,q) \to q, \mathsf{h}(q, q_f) \to q, \mathsf{h}(q_f, q) \to q\}$*. Soient*

$$\overline{t_1} = \mathsf{h}^1(E(E(\mathsf{a}^3, \mathsf{b}^3), \mathsf{b}^2), \mathsf{i}^1(\mathsf{a})),\ \overline{t_2} = \mathsf{h}^0(E(E(\mathsf{a}^2, \mathsf{b}^3), \mathsf{c}^3), \mathsf{i}^1(\mathsf{a}^3)),$$
$$\overline{t_3} = \mathsf{h}^2(\mathsf{i}^2(E(\mathsf{a}^3, \mathsf{b}^3), \mathsf{b}^2).$$

Nous avons

$$\mathsf{Top}_2(\overline{t_1}) = \mathsf{h}^1(E(\{q, q_f\}, \mathsf{b}^2), \mathsf{i}^1(\mathsf{a})),\ \mathsf{Top}_2(\overline{t_2}) = \mathsf{h}^0(E(E(\mathsf{a}^2, \{q\}), \{q\}), \mathsf{i}^1(\{q_f\})),$$
$$\mathsf{Top}_2(\overline{t_3}) = \mathsf{h}^2(\mathsf{i}^2(\{q, q_f\}, \mathsf{b}^2).$$

5.3.5 Quelques propriétés de Top

Les lemmes suivants énoncent des propriétés de Top qui nous seront utiles pour démontrer que notre simulation est correcte. Ces propriétés découlent essentiellement de la définition de Top.

Lemme 5.22. *Soient* $\bar{t} \in \overline{\mathcal{T}}_E(\mathcal{V})$ *un terme bien marqué pour* k*, et* $n \in \{0,1\}$*. Nous avons :*

1. $\mathsf{Top}_k(\bar{t}) \in \overline{\mathcal{T}}(E \cup \mathcal{Q_P}, \mathcal{V})^{\leq k}$,
2. $dpt_{\setminus E}(\mathsf{Top}_k(\bar{t} \odot n)) \leq k+2-n$,
3. $\mathsf{Top}_k(\bar{t} \odot n) = \mathsf{Top}_k(\mathsf{Top}_k(\bar{t}) \odot n)$.

Démonstration. 1. C'est une conséquence directe de la définition de Top : les positions appartenant à $\mathsf{Topd}_k(\bar{t})$ ont toutes des marques inférieures ou égales à $k+1$, et les marques égales à $k+1$ sont supprimées par l'automate $\mathcal{A_P}^{\geq k+1}$ pour obtenir $\mathsf{Top}_k(\bar{t})$.

2. Soient $n \in \{0,1\}$, $u \in \mathcal{P}\mathsf{os}_{\setminus\{E\}}(\mathsf{Top}_k(\bar{t}) \odot n)$. Pour montrer que

$$dpt_{\setminus E}(\mathsf{Top}_k(\bar{t} \odot n)) \leq k+2-n,$$

il faut par définition montrer que pour tout $u \in \mathsf{Topd}_{\setminus E}(\bar{t} \odot n)$,

$$\mathsf{Card}(\mathcal{P}\mathsf{os}_{\setminus E}{}^{\prec u}(t)) + 1 \leq k+2-n.$$

Soit $u \in \mathsf{Topd}_{\setminus E}(\bar{t} \odot n)$. Si $\mathsf{Card}(\mathcal{P}\mathsf{os}_{\setminus E}{}^{\prec u}(t)) = 0$, alors

$$\mathsf{Card}(\mathcal{P}\mathsf{os}_{\setminus E}{}^{\prec u}(t)) + 1 = 1 \leq k+2-n,$$

et le résultat est vérifié.
Nous pouvons donc supposer que $\mathsf{Card}(\mathcal{P}\mathsf{os}_{\backslash E}{}^{\prec u}(t)) > 0$. Par définition $\forall v \in \mathcal{P}\mathsf{os}_{\backslash E}(t)$,

$$\mathsf{m}(\bar{t} \odot n/v) = \max(\mathsf{m}(\bar{t}/v), \mathsf{Card}(\mathcal{P}\mathsf{os}_{\backslash E}^{\prec v}(t)) + n).$$

Soit $v \in \mathsf{Topd}_k(\bar{t} \odot n)$,

$$\mathsf{m}(\bar{t} \odot n/v) \leq k.$$

Nous obtenons

$$\mathsf{Card}(\mathcal{P}\mathsf{os}_{\backslash E}^{\prec v}(t)) + 1 \leq k + 1 - n. \tag{5.9}$$

et ce pour tout $v \in \mathsf{Topd}_k(\bar{t} \odot n)$. Soit u' la première position au-dessus de u différente d'un E :

$$u' \in \mathcal{P}\mathsf{os}_{\backslash E}^{\prec u}(t), \text{ et } \forall u' \prec u'' \prec u, u'' \in \mathcal{P}\mathsf{os}_E(t).$$

Puisque $u \in \mathsf{Topd}_k(\bar{t} \odot n)$, et puisque $u' \prec u$, $u' \in \mathsf{Topd}_k(\bar{t} \odot n)$. Nous avons donc (équation 5.9)

$$\mathsf{Card}(\mathcal{P}\mathsf{os}_{\backslash E}{}^{\prec u'}(t)) + 1 \leq k + 1 - n.$$

Comme

$$\mathsf{Card}(\mathcal{P}\mathsf{os}_{\backslash E}{}^{\prec u'}(t)) + 1 = \mathsf{Card}(\mathcal{P}\mathsf{os}_{\backslash E}{}^{\prec u}(t)),$$

nous avons

$$\mathsf{Card}(\mathcal{P}\mathsf{os}_{\backslash E}{}^{\prec u}(t)) + 1 \leq k + 2 - n.$$

et le résultat est vérifié.

3. Il est facile de vérifier que

$$\mathsf{Topd}_k(\bar{t} \odot n) = \mathsf{Topd}_k(\mathsf{Top}_k(\bar{t}) \odot n).$$

Ensuite, comme $\bar{t} \to^*_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}{}^{\geq k+1}} \mathsf{Top}_k(\bar{t})$,

$$\bar{t} \odot n \to^*_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}{}^{\geq k+1}} \mathsf{Top}_k(\bar{t}) \odot n \to^*_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}{}^{\geq k+1}} \mathsf{Top}_k(\mathsf{Top}_k(\bar{t}) \odot n).$$

Comme le terme $\mathsf{Top}_k(\mathsf{Top}_k(\bar{t}) \odot n)$ n'est plus réductible en utilisant $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}{}^{\geq k+1}$, et comme $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}{}^{\geq k+1}$ est déterministe et complet,

$$\mathsf{Top}_k(\mathsf{Top}_k(\bar{t}) \odot n) = \mathsf{Top}_k(\bar{t} \odot n).$$

□

Lemme 5.23. *Soit $\bar{t}$ un terme bien marqué pour k et $v \in \mathsf{Topd}_k(\bar{t})$. Les termes $\mathsf{Top}_k(\bar{t})[]_v$ et $\bar{t}/v$ sont bien marqués pour k et nous avons*

$$\mathsf{Top}_k(\bar{t}) = \mathsf{Top}_k(\bar{t})[\mathsf{Top}_k(\bar{t}/v)]_v.$$

De plus, si $\mathsf{m}(\bar{t}/v) = k + 1$,

$$\mathsf{Top}_k(\bar{t}) = \mathsf{Top}_k(\bar{t})[\bar{t}/v\downarrow_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}{}^{\geq k+1}}]_v.$$

Démonstration. Le fait que les termes $\bar{t}[]_v$ et $\bar{t}/v$ soient bien marqués pour k découle directement de la définition de termes bien marqués pour k, et de la définition de Topd.
Pour montrer que $\mathsf{Top}_k(\bar{t}) = \mathsf{Top}_k(\bar{t})[\mathsf{Top}_k(\bar{t}/v)]_v$, il suffit de montrer que

$$\mathsf{Top}_k(\bar{t}/v) = \mathsf{Top}_k(\bar{t})/v.$$

Commençons par montrer que $\mathsf{Topd}_k(\bar{t}/v) = \mathcal{P}\mathsf{os}(\mathsf{Top}_k(\bar{t})/v)$.
Nous avons

$$\mathsf{Topd}_k(\bar{t}/v) = \{u \in \mathcal{P}\mathsf{os}(t/v) \mid \forall u' \prec u, \mathsf{m}(\bar{t}/v \cdot u') \leq k\},$$

et

$$\mathcal{P}\mathsf{os}(\mathsf{Top}_k(\bar{t})/v) = \{u \mid v{\cdot}u \in \mathsf{Topd}_k(\bar{t})\} = \{u \in \mathcal{P}\mathsf{os}(t/v) \mid \forall z \prec v{\cdot}u, \mathsf{m}(\bar{t}/z) \leq k\}.$$

Clairement,

$$\mathsf{Topd}_k(\bar{t}/v) \subseteq \mathcal{P}\mathsf{os}(\mathsf{Top}_k(\bar{t})/v).$$

Comme le terme $\bar{t}$ est bien marqué pour k, et comme $v \in \mathsf{Topd}_k(\bar{t})$, pour toute position $u \prec v$,$\mathsf{m}(\bar{t}/u) \leq k$. Ces deux ensembles sont donc identiques.
De plus, pour toute position $u \in \mathsf{Topd}_k(\bar{t}/v)$,

$$\mathsf{root}(\mathsf{Top}_k(\bar{t}/v)/u) = \mathsf{root}(\mathsf{Top}_k(\bar{t}/v \cdot u)) = \mathsf{root}(\bar{t}/v \cdot u)$$

si $\mathsf{m}(v \cdot u) \leq k$, et

$$\mathsf{root}(\mathsf{Top}_k(\bar{t}/v)/u) = \mathsf{root}(\mathsf{Top}_k(\bar{t}/v \cdot u)) = \bar{t}/v \cdot u \downarrow_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{\geq k+1}}$$

si $\mathsf{m}(\bar{t}/v \cdot u) = k + 1$. Ainsi,

$$\mathsf{Top}_k(\bar{t}) = \mathsf{Top}_k(\bar{t})[\mathsf{Top}_k(\bar{t}/v)]_v.$$

Et si $\mathsf{m}(\bar{t}/v) = k + 1$, alors

$$\mathsf{Top}_k(\bar{t})/v = \bar{t}/v \downarrow_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{\geq k+1}} .$$

Cela permet de conclure la preuve de ce lemme. □

Lemme 5.24. *Soient* $\bar{s}, \bar{t} \in \overline{\mathcal{T}}_E, v \in \mathsf{Topd}_k(\bar{t})$ *tels que*

$$\bar{s} \;{}_{\mathsf{bo}(k)}{\circ\!\!\longrightarrow}_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}, l\to r, \bar{l}, \bar{\sigma}, v}\; \bar{t}.$$

Nous avons

$$\mathsf{Top}_k(\bar{s}) = \mathsf{Top}_k(\bar{s})[l\mathsf{Top}_k(\bar{\sigma})]_v \text{ et } \mathsf{Top}_k(\bar{t}) = \mathsf{Top}_k(\bar{s})[r\mathsf{Top}_k(\bar{\sigma} \odot 1)]_v.$$

Démonstration. D'après le lemme 5.23, $\mathsf{Top}_k(\bar{s}) = \mathsf{Top}_k(\bar{s})[\mathsf{Top}_k(\bar{l}\bar{\sigma})]_v$. Comme le pas est $\mathsf{bo}(k)$, $\bar{l} \in \overline{\mathcal{T}}_E(\mathcal{V})^{\leq k}$, et $\mathsf{Top}_k(\bar{l}) = \bar{l}$. De plus, pour toute position $u \in \mathcal{P}\mathsf{os}_{\mathcal{V}}(l)$, $v \cdot u \in \mathsf{Topd}_k(\bar{s})$. Nous pouvons donc appliquer le lemme 5.23 à chaque position $v \cdot u$ telle que $u \in \mathcal{P}\mathsf{os}_{\mathcal{V}}(l)$ pour obtenir $\mathsf{Top}_k(\bar{s}) = \mathsf{Top}_k(\bar{s})[\bar{l}\mathsf{Top}_k(\bar{\sigma})]_v$. Le même raisonnement peut être appliqué à $\mathsf{Top}_k(\bar{t})$ pour obtenir $\mathsf{Top}_k(\bar{t}) = \mathsf{Top}_k(\bar{s})[r\mathsf{Top}_k(\bar{\sigma} \odot 1)]_v$. □

Lemme 5.25. *Soient* $\overline{s} \in \overline{\mathcal{T}}_E(\mathcal{V})$ *un terme bien marqué pour* k, *et* $n \in \{0,1\}$. *Il existe* $\overline{t}$ *un terme bien marqué pour* k *tel que*

$$\mathsf{Top}_k(\overline{s}) \rightarrow^*_{\mathcal{A_P}^{\leq k}} \overline{t} \text{ et } \overline{t} \odot n = \mathsf{Top}_k(\overline{s} \odot n).$$

Démonstration. Par définition,

$$\overline{s} \odot n \rightarrow^*_{\mathcal{A_P}^{\mathbb{N}}} \mathsf{Top}_k(\overline{s} \odot n).$$

D'après le lemme 5.17 page 124 il existe $\overline{t}$ tel que

$$\overline{s} \rightarrow^*_{\mathcal{A_P}^{\mathbb{N}}} \overline{t} \text{ et } \overline{t} \odot n = \mathsf{Top}_k(\overline{s} \odot n).$$

Comme $\mathsf{Topd}_k(\overline{s} \odot n) \subseteq \mathsf{Topd}_k(\overline{s})$, nous avons $\mathcal{P}\mathsf{os}(t) \subseteq \mathsf{Topd}_k(\overline{s})$. Ainsi,

$$\overline{s} \rightarrow^*_{\mathcal{A_P}^{\mathbb{N}}} \mathsf{Top}_k(\overline{s}) \text{ (par définition)}, \ \overline{s} \rightarrow^*_{\mathcal{A_P}^{\mathbb{N}}} \overline{t} \text{ et } \mathcal{P}\mathsf{os}(t) \subseteq \mathsf{Topd}_k(\overline{s}).$$

Comme $\mathcal{A_P}^{\mathbb{N}}$ est déterministe et complet,

$$\mathsf{Top}_k(\overline{s}) \rightarrow^*_{\mathcal{A_P}^{\mathbb{N}}} \overline{t}.$$

D'après le point 1 du lemme 5.22 page 127, $\mathsf{mmax}(\mathsf{Top}_k(\overline{s})) \leq k$. Nous avons donc

$$\mathsf{Top}_k(\overline{s}) \rightarrow^*_{\mathcal{A}^{\leq k}} \overline{t} \text{ et } \overline{t} \odot n = \mathsf{Top}_k(\overline{s} \odot n).$$

□

5.3.6 Présentation de la simulation

Nous allons dans cette section introduire le SCR $\mathcal{G}$ qui va nous permettre de simuler les dérivations $\mathsf{bo}(k)$. Voyons comment nous allons procéder.

1. Nous allons commencer par définir la notion de peigne associé à un terme marqué. Ce peigne sera le représentant d'une classe de termes qui peuvent se réécrire l'un en l'autre en utilisant uniquement les règles de manipulation des E. Le peigne $\lfloor \overline{t} \rfloor$ associé à $\overline{t} \in \overline{\mathcal{T}}(E \cup \mathcal{Q_P}, \mathcal{V})$ est obtenu à partir de $\overline{t}$ en deux temps. Nous commençons en réorganisant les E de manière à ce qu'il n'y ait jamais de E qui soit le fils droit d'un autre E. Puis nous supprimons les sous-termes identiques dont un antécédent commun est un E tel que les symboles situés entre ses sous-termes identiques et ce E soient uniquement E. Autrement dit, nous supprimons les sous-termes identiques situés sous une même pile de E. Après ce processus, il n'y a plus de sous-termes identiques situés chacun sous une même "pile" de E. Par exemple, le peigne associé à $f(E(E(b^1,a^2),E(b^2,a^2)))$ est $\lfloor f(E(E(b^1,a^2),E(b^2,a^2))) \rfloor = f(E(E(b^1,a^2)),b^2)$. Si deux termes $\overline{t}$ et $\overline{t'}$ ont le même peigne, alors il est possible de passer de $\overline{t}$ à $\overline{t'}$ juste en réorganisant les E et en effectuant les copies de sous-termes nécessaires. Ceci se traduit par la proposition des peignes 5.40 page 139 qui stipule que pour tout n, les termes $\overline{t} \odot n$ et $\overline{t'} \odot n$ sont équivalents modulo $\mathcal{E}$: $\overline{t} \odot n \circ\!\!\rightarrow^*_{\mathcal{E}} \overline{t'} \odot n$. Notons $\mathcal{C}^k_m$ l'ensemble des peignes $\overline{p}$ ayant une profondeur (sans compter les E) inférieure à m et des marques inférieures ou égales à k. Pour tout m, l'ensemble des termes $\overline{t}$ tels que $\lfloor \overline{t} \rfloor \in \mathcal{C}^k_m$ est reconnaissable.

2. Nous allons ensuite définir pour :

— chaque règle $l \rightarrow r \in \mathcal{R} \cup \mathcal{E}$,

— chaque version marquée $\bar{l} \in \overline{\mathcal{T}}_E(\mathcal{V})^{\leq k}$ de l,

— et chaque substitution $\overline{\tau}$ associant à chaque variable de $\mathcal{V}\mathsf{ar}(l)$ un peigne dans $\mathcal{C}^k_{k+2}$, (c'est-à-dire un peigne de profondeur (sans compter les E) inférieure ou égale à $k+2$ et dont les marques sont inférieures à k.)

un SCR $\mathcal{G}(\bar{l}, r, \overline{\tau}) = (\mathcal{F}^{\leq k} \cup \{E\} \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{P}}, \{p \to q \mid p \in L, q \in R\})$, où

— L est l'ensemble (reconnaissable) des termes $\overline{l\sigma}$ tels que le peigne associé à $\overline{\sigma}$ soit $\overline{\tau}$,

— R est l'ensemble (reconnaissable) des termes $\mathsf{lin}(r)\overline{\sigma}$ tels que pour chaque variable $x_{i,j} \in \mathcal{V}\mathsf{ar}(\mathsf{lin}(r))$, le peigne associé à $x_{i,j}\overline{\sigma}$ est $x_i\lfloor\overline{\tau} \odot a\rfloor$ (avec $a = 1$ si $l \to r \in \mathcal{R}$, 0 si $l \to r \in \mathcal{E}$).

Rappelons que lorsque nous utilisons $\mathsf{lin}(r)$ (voir préliminaires, section 2.5), nous supposons implicitement que les variables de r sont $x_1, \ldots, x_n$, et que le linéarisé de r est obtenu en substituant chaque occurrence d'une variable x_i par la variable $x_{i,j}$, où j est la position de cette occurrence parmi les occurrences de x_j (en comptant dans l'ordre lexicographique). Nous noterons $\mathcal{G}$ l'union (finie) de tous ces SCR et de $\mathcal{A_P}^{\leq k}$.

3. Nous verrons ensuite que tout pas de réécriture $\mathsf{bo}(k)$ $\overline{s}$ ${}_{\mathsf{bo}(k)}{\circ\!\!\longrightarrow}_{\mathcal{R},l\to r,\bar{l},\overline{\sigma},v}$ $\overline{t}$, peut être simulé par ce SCR. C'est-à-dire qu'il existe une dérivation de $\mathsf{Top}_k(\overline{s})$ (la partie utile de $\overline{s}$) à $\mathsf{Top}_k(\overline{t})$ (la partie utile de $\overline{t}$). C'est la version dans le cas linéaire à gauche du lemme de projection présenté dans le chapitre sur le cas linéaire. Nous discuterons ici du cas où la règle appliquée est une règle de $\mathcal{R}$, mais la situation est similaire lorsque la règle appliquée est une règle de $\mathcal{E}$. Comme dans le cas linéaire, la démarche se fait aussi en deux temps : d'abord couper les parties inutiles, puis simuler le pas.

Commençons donc par couper les parties inutiles de $\mathsf{Top}_k(\overline{s})$ en utilisant $\mathcal{A_P}^{\leq k}$, c'est-à-dire les parties de $x\mathsf{Top}_k(\overline{\sigma})$ qui n'apparaissent pas dans $x\underline{\mathsf{Top}_k}(\overline{\sigma} \odot 1)$ ou qui sont remplacées par un état. Nous obtenons un terme $\mathsf{Top}_k(\overline{s})[\overline{l\sigma'}]_v$ tel que

1. $\mathsf{Top}_k(\overline{s}) \to^*_{\mathcal{A_P}^{\leq k}} \mathsf{Top}_k(\overline{s})[\overline{l\sigma'}]_v$,
2. $\mathsf{Top}_k(\overline{t}) = \mathsf{Top}_k(\overline{s})[r(\overline{\sigma'} \odot 1)]_v$.

Soit le SCR $\mathcal{G}(\bar{l}, r, \lfloor\overline{\sigma'}\rfloor) = (\mathcal{F}^{\leq k} \cup \{E\} \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{P}}, \{p \to q \mid p \in L, q \in R\})$. Notons que ce SCR est bien défini puisque :

— le pas est $\mathsf{bo}(k)$ et par définition $\bar{l} \in \overline{\mathcal{T}}_E(\mathcal{V})^{\leq k}$,

— d'après le lemme 5.22 page 127, $dpt_{\setminus E}(\mathsf{Top}_k(\overline{\sigma} \odot 1)) \leq k+1$, et donc $dpt_{\setminus E}(\lfloor\overline{\sigma'}\rfloor) \leq k+1$. Toujours d'après le même lemme $\mathsf{Top}_k(\overline{s}) \in \overline{\mathcal{T}}(E \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{P}})^{\leq k}$, et donc $\overline{\sigma'} : \mathcal{V} \to \overline{\mathcal{T}}^{\leq k}_E$. Nous avons donc bien $\lfloor\overline{\sigma'}\rfloor : \mathcal{V} \to \mathcal{C}^k_{k+2}$ (et même $\mathcal{C}^k_{k+1}$, mais le $+2$ est utile pour le cas où la règle appliquée est une règle de $\mathcal{E}$).

Clairement, $\overline{l\sigma'} \in L$. Comme $\lfloor\overline{\sigma'} \odot 1\rfloor = \lfloor\lfloor\overline{\sigma}\rfloor \odot 1\rfloor$, nous avons $r\overline{\sigma'} \in R$. Nous pouvons donc simuler le pas et nous obtenons :

$$\mathsf{Top}_k(\overline{s})[\overline{l\sigma'}]_v \to_{\mathcal{G}(\bar{l},r,\lfloor\overline{\sigma'}\rfloor)} \mathsf{Top}_k(\overline{t}) = \mathsf{Top}_k(\overline{s})[r\overline{\sigma'} \odot 1]_v.$$

En utilisant la dérivation 1. et celle ci-dessus, nous obtenons le lemme de projection : il existe une dérivation

$$\mathsf{Top}_k(\overline{s}) \to^*_{\mathcal{G}} \mathsf{Top}_k(\overline{t}).$$

4. À nouveau, comme dans le cas linéaire, la deuxième partie de la simulation s'obtient à l'aide du lemme de relèvement. Soit $\mathcal{G}(\bar{l}, r, \overline{\tau})$ un des SCR introduits précédemment, et soit $\overline{s} \rightarrow^*_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{+\mathbb{N}}} \overline{s'} = \overline{s'}[\bar{l}\overline{\sigma_1}]_v \rightarrow_{\mathcal{G}(\bar{l},r,\overline{\tau})} \overline{t} = \overline{s'}[\mathsf{lin}(r)\overline{\sigma_2}]_v$. Le terme $\overline{s}$ est de la forme $\overline{s} = \overline{s}[\bar{l}\overline{\sigma_0}]_v$ avec $\overline{s}[]_v \rightarrow^*_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{+\mathbb{N}}} \overline{s'}[]_v$ et $\forall x \in \mathcal{V}\mathsf{ar}(l), x\overline{\sigma_0} \rightarrow^*_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{+\mathbb{N}}} x\overline{\sigma_1}$. Nous pouvons donc appliquer la règle $l \rightarrow r$ et nous obtenons un pas $\mathsf{bo}(k)$:

$$\overline{s} \ {}_{\mathsf{bo}(k)}{\circ\!\!\rightarrow}_{\mathcal{R},v} \ \overline{s}[r(\overline{\sigma_0} \odot a)]_v,$$

avec $a = 0$ si $l \rightarrow r \in \mathcal{E}$, $a = 1$ si $l \rightarrow r \in \mathcal{R}$. Nous pouvons réduire $r(\overline{\sigma_0} \odot a)$ au domaine $\mathcal{P}\mathsf{os}(r\sigma_1)$. Nous obtenons une dérivation

$$\overline{s}[r(\overline{\sigma_0} \odot a)]_v \rightarrow^*_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{+\mathbb{N}}} \overline{s}[r(\overline{\sigma_1} \odot a)]_v.$$

Pour tout $x_i \in \mathcal{V}\mathsf{ar}(r)$, $\lfloor x_i\overline{\sigma_1} \odot a \rfloor = \lfloor x\overline{\tau} \odot a \rfloor$. La proposition des peignes 5.39 nous assure que pour tout $x_{i,j} \in \mathcal{V}\mathsf{ar}(\mathsf{lin}(r))$, $x_i\overline{\sigma_1} \odot a \ {}_{\mathsf{bo}(k)}{\circ\!\!\rightarrow}^*_{\mathcal{E}} \ x_{i,j}\overline{\sigma_2}$. Nous obtenons

$$\overline{s}[r(\overline{\sigma_0} \odot a)]_v \ {}_{\mathsf{bo}(k)}{\circ\!\!\rightarrow}^*_{\mathcal{E}} \ \overline{t} = \overline{s}[r\overline{\sigma_1}]_v.$$

Nous avons construit une dérivation

$$\overline{s} \ {}_{\mathsf{bo}(k)}{\circ\!\!\rightarrow}_{\mathcal{R},v} \rightarrow^*_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{+\mathbb{N}}} \ {\circ\!\!\rightarrow}^*_{\mathcal{E}} \ \overline{t}.$$

Nous verrons que nous pouvons appliquer les pas dans $\mathcal{E}$ avant les pas dans $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{+\mathbb{N}}$. Nous avons obtenu le lemme de relèvement : il existe une dérivation

$$\overline{s} \ {}_{\mathsf{bo}(k)}{\circ\!\!\rightarrow}_{\mathcal{R},v} \ {}_{\mathsf{bo}(k)}{\circ\!\!\rightarrow}^*_{\mathcal{E}} \rightarrow^*_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{+\mathbb{N}}} \ \overline{t}.$$

- De ces deux lemmes découlera la simulation :

$$\forall s \in \mathcal{T}, s \in (\ {}_{\mathsf{bo}(k)}{\rightarrow}^*_{\mathcal{R}})[T] \Leftrightarrow s \in (\rightarrow^*_{\mathcal{G}})[\mathcal{Q}_{f,\mathcal{P}}].$$

Cela suffira pour démontrer la i-préservation de la reconnaissabilité pour la stratégie $\mathsf{bo}(k)$ puisque la relation $\rightarrow^*_{\mathcal{G}}$ est reconnue par un TTC et i-préserve donc la reconnaissabilité.

5.3.7 Peigne associé à un terme et l'ensemble $\mathcal{C}_n^k$

Nous allons dans cette section définir la notion de peigne et démontrer la proposition des peignes 5.40.

Définition 5.26. *Soit $\overline{t} \in \overline{\mathcal{T}}(E \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{P}})$. Soit B le SRT*

$$B := \{E(x, E(y, z)) \rightarrow E(E(x, y), z)\}.$$

Nous notons $\ll \overline{t} \gg$ la forme normale associée à $\overline{t}$: $\ll t \gg = t\downarrow_B$.

Notons que nous utilisons la réécriture standard ($\rightarrow$), et non la réécriture marquée (${\circ\!\!\rightarrow}$). Clairement, cette forme normale existe puisque B est confluent et termine. Si deux termes $\overline{s}$ et $\overline{t}$ ont une même forme normale modulo B alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{s} \odot n$ et $\overline{t} \odot n$ sont équivalents modulo $\mathcal{E}$. Ce résultat est un corollaire du lemme suivant.

Lemme 5.27. *Soient $\overline{s}, \overline{t} \in \overline{\mathcal{T}}(E \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{P}})$, tels que $\overline{s} \to_B \overline{t}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons*

1. $\overline{s} \odot n \circ\!\!\to^*_{\mathcal{E}} \overline{t} \odot n$.
2. $\overline{t} \odot n \circ\!\!\to^*_{\mathcal{E}} \overline{s} \odot n$.

Démonstration. Soient $\overline{s}, \overline{t} \in \overline{\mathcal{T}}(E \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{P}})$, tels que $\overline{s} \to_B \overline{t}$ et $n \in \mathbb{N}$. Nous avons

$$\overline{s} \odot n = \overline{s} \odot n[E(x\overline{\sigma} \odot m, E(y\overline{\sigma} \odot m, z\overline{\sigma} \odot m))]_v,$$

$$\overline{t} \odot n = \overline{s}[E(E(x\overline{\sigma} \odot m, y\overline{\sigma} \odot m), z\overline{\sigma} \odot m)]_v.$$

où

$$m = \mathsf{Card}(\mathcal{P}\mathsf{os}_{\setminus E}{}^{\prec v}(\overline{s})) + n$$

Rappelons que $\overline{t} \odot m \odot 0 = \overline{t} \odot m$.
1. Nous avons une dérivation

$$\begin{aligned}
&\overline{s} \odot n \circ\!\!\to_{x \to E(x,x),v} \overline{s} \odot n[E(E(x\overline{\sigma} \odot m, E(y\overline{\sigma} \odot m, z\overline{\sigma} \odot m)), E(x\overline{\sigma} \odot m, E(y\overline{\sigma} \odot m, z\overline{\sigma} \odot m)))]_v \\
&\circ\!\!\to_{E(x,y) \to y, v\cdot 0\cdot 1} \overline{s} \odot n[E(E(x\overline{\sigma} \odot m, y\overline{\sigma} \odot m), E(x\overline{\sigma} \odot m, E(y\overline{\sigma} \odot m, z\overline{\sigma} \odot m)))]_v \\
&\circ\!\!\to_{E(x,y) \to y, v\cdot 1} \overline{s} \odot n[E(E(x\overline{\sigma} \odot m, y\overline{\sigma} \odot m), E(y\overline{\sigma} \odot m, z\overline{\sigma} \odot m))]_v \\
&\circ\!\!\to_{E(x,y) \to x, v\cdot 1} \overline{s} \odot n[E(E(x\overline{\sigma} \odot m, y\overline{\sigma} \odot m), z\overline{\sigma} \odot m)]_v = \overline{t} \odot n.
\end{aligned}$$

2. Nous avons une dérivation :

$$\begin{aligned}
&\overline{t} \odot n \circ\!\!\to_{x \to E(x,x),v} \\
&\overline{t} \odot n[E(E(E(x\overline{\sigma} \odot m, y\overline{\sigma} \odot m), z\overline{\sigma} \odot m), E(E(x\overline{\sigma} \odot m, y\overline{\sigma} \odot m), z\overline{\sigma} \odot m))]_v \\
&\circ\!\!\to_{E(x,y) \to x, v\cdot 0\cdot 0} \overline{t} \odot n[E(E(x\overline{\sigma} \odot m, z\overline{\sigma} \odot m), E(E(x\overline{\sigma} \odot m, y\overline{\sigma} \odot m), z\overline{\sigma} \odot m))]_v \\
&\circ\!\!\to_{E(x,y \to x), v\cdot 0)} \overline{t} \odot n[E(x\overline{\sigma} \odot m, E(E(x\overline{\sigma} \odot m, y\overline{\sigma} \odot m), z\overline{\sigma} \odot m))]_v \\
&\circ\!\!\to_{E(x,y) \to y, v\cdot 1\cdot 1} \overline{t} \odot n[E(x\overline{\sigma} \odot m, E(y\overline{\sigma} \odot m, y\overline{\sigma} \odot m))]_v = \overline{s} \odot n.
\end{aligned}$$

□

Corollaire 5.28. *Pour tous $\overline{s}, \overline{t} \in \overline{\mathcal{T}}(E \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{P}})$, tels que $\ll \overline{s} \gg = \ll \overline{t} \gg$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons*

$$\overline{s} \odot n \circ\!\!\to^*_{\mathcal{E}} \overline{t} \odot n.$$

Démonstration. Soient $\overline{s}, \overline{t} \in \overline{\mathcal{T}}(E \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{P}})$, tels que $\ll \overline{s} \gg = \ll \overline{t} \gg$. Par définition,

$$\overline{s} \to^*_{\mathcal{B}} \ll \overline{s} \gg \text{ et } \overline{t} \to^*_{\mathcal{B}} \ll \overline{t} \gg .$$

Par récurrence sur la longueur de la dérivation concernée, et en utilisant le lemme 5.27 nous obtenons

$$\forall n \in \mathbb{N}, \overline{s} \odot n \circ\!\!\to^*_{\mathcal{E}} \ll \overline{t} \gg \odot n \text{ et } \ll \overline{t} \gg \odot n \circ\!\!\to^*_{\mathcal{E}} \overline{t} \odot n.$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \overline{s} \odot n \circ\!\!\to^*_{\mathcal{E}} \overline{t} \odot n.$$

□

Nous allons maintenant définir la relation $\lhd$ entre termes marqués. Nous aurons $\overline{s} \lhd \overline{t}$ lorsque les deux conditions suivantes sont remplies :

— le terme $\overline{s}$ a pour racine un symbole différent de E,
— le terme $\overline{s}$ est un sous-terme propre de $\overline{t}$ situé à une position u qui n'est précédée que par des E (donc en particulier $\mathsf{root}(t) = E$).

Définition 5.29. *Nous définissons la relation binaire $\lhd$ sur $\overline{\mathcal{T}}(E \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{P}})$ par $\overline{s} \lhd \overline{t}$ si*

$$\mathsf{root}(\overline{s}) \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}} \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{P}}, \mathsf{root}(\overline{t}) = E,$$

et s'il existe

$$u \in \{w \in \mathcal{P}\mathsf{os}_{\setminus E}(t) \mid \mathcal{P}\mathsf{os}_{\setminus E}^{\prec w}(t) = \emptyset\}$$

tels que $\overline{t}/u = \overline{s}$. Nous noterons $\overline{s} \not\lhd \overline{t}$ lorsque nous n'avons pas $\overline{s} \lhd \overline{t}$.

Remarquons que pour tout $\overline{t}$, $\overline{t} \not\lhd \overline{t}$. Nous allons voir que lorsque $\overline{s} \lhd \overline{t}$, alors $\overline{t}$ peut se réécrire en $\overline{s}$ en utilisant les règles de $\mathcal{E}$.

Lemme 5.30. *Soient $\overline{s}, \overline{t} \in \overline{\mathcal{T}}(E \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{P}})$ tels que $\overline{s} \lhd \overline{t}$. Nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\overline{t} \odot n \circ\!\!\to_{\mathcal{E}}^{*} \overline{s} \odot n.$$

Démonstration. Soient $\overline{s}, \overline{t} \in \overline{\mathcal{T}}(E \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{P}})$ tels que $\overline{s} \lhd \overline{t}$. Par définition, il existe une position $u \in \mathcal{P}\mathsf{os}_{\setminus E}(t)$ qui n'est précédée que par des E et telle que $\overline{t}/u = \overline{s}$. En utilisant uniquement les règles de sélection adéquates, nous obtenons la dérivation voulue. □

Nous pouvons maintenant définir formellement la notion de peigne.

Définition 5.31 (peigne associé à un terme)**.** *Soit $\overline{t} \in \overline{\mathcal{T}}(E \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{P}})$. Soit D le SRT (infini) clos défini par*

$$\begin{aligned} D := \{&E(E(x\overline{\sigma}, y\overline{\sigma}), z\overline{\sigma}) \to E(x\overline{\sigma}, y\overline{\sigma}) \mid \\ &\overline{\sigma} : \mathcal{V} \to \overline{\mathcal{T}}(E \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{P}}), z\overline{\sigma} \lhd E(x\overline{\sigma}, y\overline{\sigma})\} \\ &\cup \{E(x\overline{\sigma}, x\overline{\sigma}) \to x\overline{\sigma} \mid \overline{\sigma} : \mathcal{V} \to \overline{\mathcal{T}}(E \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{P}})\} \\ &\cup \{E(E(x\overline{\sigma}, x\overline{\sigma}), y\overline{\sigma}) \to E(x\overline{\sigma}, y\overline{\sigma}) \mid \overline{\sigma} : \mathcal{V} \to \overline{\mathcal{T}}(E \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{P}})\}. \end{aligned}$$

Le **peigne associé à $\overline{t}$** *noté $\lfloor \overline{t} \rfloor$ est défini par $\lfloor \overline{t} \rfloor := \ll \overline{t} \gg \downarrow_D$. Nous étendons cette définition aux substitutions marquées ($\lfloor \overline{\sigma} \rfloor : x \mapsto \lfloor x\overline{\sigma} \rfloor$).*

Cette forme normale est bien définie puisque D termine et est confluent.

Exemple 5.32. *Soient*

$$t_0 = E(\mathsf{a}^0, \mathsf{a}^0),\ t_1 = E(\mathsf{a}^1, E(\mathsf{a}^2, \mathsf{b}^1)),\ t_2 = E(\mathsf{a}^1, E(\mathsf{a}^1, \mathsf{b}^1))\ \textit{et}\ t_3 = \mathsf{h}(E(E(\mathsf{b}^1, \mathsf{a}^2), E(\mathsf{b}^2, \mathsf{a}^2))).$$

Nous avons

$$\ll t_0 \gg = t_0,\ \ll t_1 \gg = E(E(\mathsf{a}^1, \mathsf{a}^2), \mathsf{b}^1), \ll t_2 \gg = E(E(\mathsf{a}^1, \mathsf{a}^1), \mathsf{b}^1),$$

$$\ll t_3 \gg = \mathsf{h}(E(E(E(\mathsf{b}^1, \mathsf{a}^2), \mathsf{b}^2), \mathsf{a}^2)),$$

et

$$\lfloor t_0 \rfloor = \mathsf{a}^0,\ \lfloor t_1 \rfloor = \ll t_1 \gg,\ \lfloor t_2 \rfloor = E(\mathsf{a}^1, \mathsf{b}^1),\ \textit{et}\ \lfloor t_3 \rfloor = \mathsf{h}(E(E(\mathsf{b}^1, \mathsf{a}^2), \mathsf{b}^2)).$$

Le lemme 5.36 nous sera utile pour démontrer les lemmes de projection et de relèvement. Pour le démontrer nous allons utiliser le lemme suivant et le corollaire 5.35 page 136.

Lemme 5.33. *Pour tout terme $\overline{s} \in \overline{\mathcal{T}}(E \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{P}})$, et tout $n \in \mathbb{N}$*

$$\ll \overline{s} \odot n \gg = \ll \overline{s} \gg \odot\, n.$$

Démonstration. Par définition,

$$\overline{s} \rightarrow_B^* \ll \overline{s} \gg = \overline{s} \downarrow_D .$$

Comme l'automate ne modifie pas les marques nous avons

$$\overline{s} \odot n \rightarrow_B^* \ll \overline{s} \gg \odot\, n.$$

Comme aucune règle de B ne peut être appliquée sur $\ll \overline{s} \gg$ (il est en forme normale), aucune règle ne peut être appliquée sur $\ll \overline{s} \gg \odot\, n$ et nous avons

$$\ll \overline{s} \gg \odot n = \overline{s} \odot n \downarrow_B = \ll \overline{s} \odot n \gg .$$

□

Lemme 5.34. *Pour tous termes $\overline{s}, \overline{t} \in \overline{\mathcal{T}}(E \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{P}})$, et tout $n \in \mathbb{N}$*

$$\overline{s} \rightarrow_D \overline{t} \Rightarrow \overline{s} \odot n \rightarrow_D \overline{t} \odot n.$$

Démonstration. Soit

$$\overline{s} \rightarrow_{D, \overline{l} \rightarrow \overline{r}, v} \overline{t}.$$

Nous distinguons trois cas correspondant aux trois types de règles de D.

1. $\boldsymbol{\overline{l} \rightarrow \overline{r} = E(E(x\overline{\sigma}, y\overline{\sigma}), z\overline{\sigma}) \rightarrow E(x\overline{\sigma}, y\overline{\sigma})}$ **avec** $\boldsymbol{z\overline{\sigma} \lhd E(x\overline{\sigma}, y\overline{\sigma})}$**.**
   Il existe une position $u \in \mathcal{P}\mathsf{os}_{\setminus E}(E(x\overline{\sigma}, y\overline{\sigma}))$ telle que

   $$\mathcal{P}\mathsf{os}_{\setminus E}^{\prec u}(E(x\overline{\sigma}, y\overline{\sigma})) = \emptyset,$$

   et telle que

   $$E(x\overline{\sigma}, y\overline{\sigma})/u = z\overline{\sigma}.$$

   Comme il n'y a que des E au-dessus de u dans $E(x\overline{\sigma}, y\overline{\sigma})$, nous avons

   $$\overline{s} \odot n = \overline{s} \odot n[E(E(x\overline{\sigma} \odot m, y\overline{\sigma} \odot m)[z\overline{\sigma} \odot m]_u, z\overline{\sigma} \odot m)]_v,$$

   et

   $$\overline{t} \odot n = \overline{s} \odot n[E(x\overline{\sigma} \odot m, y\overline{\sigma} \odot m)[z\overline{\sigma} \odot m]_u]_v,$$

   avec

   $$m = \mathsf{Card}(\mathcal{P}\mathsf{os}_{\setminus E}^{\prec v}(t)) + n.$$

   Ainsi,

   $$z\overline{\sigma} \odot m \lhd E(x\overline{\sigma} \odot m, y\overline{\sigma} \odot m),$$

   et

   $$E(E(x\overline{\sigma} \odot m, y\overline{\sigma} \odot m), z\overline{\sigma} \odot m) \rightarrow E(x\overline{\sigma} \odot m, y\overline{\sigma} \odot m) \in D.$$

   Nous avons donc

   $$\overline{s} \odot n \rightarrow_{D,v} \overline{t} \odot n.$$

2. $\overline{\boldsymbol{l}} \rightarrow \overline{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{E(E(x\overline{\sigma}, x\overline{\sigma}), y\overline{\sigma}) \rightarrow E(x\overline{\sigma}, y\overline{\sigma})}$.
   Alors,
$$\overline{s} \odot n = \overline{s} \odot n[E(E(x\overline{\sigma} \odot m, x\overline{\sigma} \odot m), y\overline{\sigma} \odot m)]_v,$$
   et
$$\overline{t} \odot n = \overline{s} \odot n[E(x\overline{\sigma} \odot m, y\overline{\sigma} \odot m)]_v.$$
   avec
$$m = \mathsf{Card}(\mathcal{P}\mathsf{os}^{\prec v}_{\setminus E}(t)) + n.$$
   La règle
$$E(E(x\overline{\sigma} \odot m, x\overline{\sigma} \odot m), y\overline{\sigma} \odot m) \rightarrow E(x\overline{\sigma} \odot m, y\overline{\sigma} \odot m) \in D,$$
   et nous avons
$$\overline{s} \odot n \rightarrow_{D,v} \overline{t} \odot n.$$
3. $\overline{\boldsymbol{l}} \rightarrow \overline{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{E(x\overline{\sigma}, x\overline{\sigma}) \rightarrow x\overline{\sigma}}$.
   Alors,
$$\overline{s} \odot n = \overline{s} \odot n[E(x\overline{\sigma} \odot m, x\overline{\sigma} \odot m)]_v,$$
   et
$$\overline{t} \odot n = \overline{s} \odot n[x\overline{\sigma} \odot m]_v.$$
   avec
$$m = \mathsf{Card}(\mathcal{P}\mathsf{os}^{\prec v}_{\setminus E}(t)) + n.$$
   La règle
$$E(x\overline{\sigma} \odot m, x\overline{\sigma} \odot m) \rightarrow x\overline{\sigma} \odot m \in D,$$
   et nous avons
$$\overline{s} \odot n \rightarrow_{D,v} \overline{t} \odot n.$$

□

Corollaire 5.35. *Pour tout terme $\overline{s} \in \overline{\mathcal{T}}(E \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{P}})$, et tout $n \in \mathbb{N}$*
$$\ll \overline{s} \gg \odot n \rightarrow^*_D \lfloor \overline{s} \rfloor \odot n.$$

Démonstration. Par définition,
$$\ll \overline{s} \gg \rightarrow^*_D \lfloor \overline{s} \rfloor.$$
Par récurrence sur la longueur de la dérivation, et en utilisant le lemme 5.34, nous obtenons
$$\ll \overline{s} \gg \odot n \rightarrow^*_D \lfloor \overline{s} \rfloor \odot n.$$

□

Lemme 5.36. *Soit $\overline{s} \in \overline{\mathcal{T}}(E \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{P}})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,*
$$\lfloor \overline{s} \odot n \rfloor = \lfloor \lfloor \overline{s} \rfloor \odot n \rfloor.$$

Démonstration. Par définition,

$$\overline{s} \rightarrow_B^* \ll \overline{s} \gg \rightarrow_D^* \lfloor \overline{s} \rfloor.$$

D'après le lemme 5.33,

$$\ll \overline{s} \gg \odot n = \ll \overline{s} \odot n \gg .$$

D'après le corollaire 5.35,

$$\ll \overline{s} \gg \odot n \rightarrow_D^* \lfloor \overline{s} \rfloor \odot n.$$

De plus,

$$\lfloor \overline{s} \rfloor \odot n \rightarrow_D^* \lfloor \lfloor \overline{s} \rfloor \odot n \rfloor = \ll \overline{s} \gg \odot n \downarrow_D = \ll \overline{s} \odot n \gg \downarrow_D = \lfloor \overline{s} \odot n \rfloor.$$

□

Définition 5.37 (L'ensemble $\mathcal{C}_n^k$)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}$. Nous noterons $\mathcal{C}_n^k$ l'ensemble (fini) des peignes de profondeur (sans compter les E) inférieure à n et ayant des marques inférieures ou égales à k*

$$\mathcal{C}_n^k := \{\lfloor \overline{t} \rfloor \mid \overline{t} \in \overline{\mathcal{T}}(E \cup \mathcal{Q}_\mathcal{P})^{\leq k}, dpt_{\setminus E}(t) \leq n\}.$$

Remarque 5.38 (L'ensemble des termes qui sont équivalents à un peigne donné est reconnaissable)**.** *Soit $\overline{t} \in \overline{\mathcal{T}}(E \cup \mathcal{Q}_\mathcal{P})$ un peigne. Nous notons*

$$\mathsf{Rep}(\overline{t}) = \{\overline{s} \in \mathcal{T}(\mathcal{F} \cup \mathcal{Q}_\mathcal{P}) \mid \overline{t} \rightarrow^*_{E(x,y) \rightarrow x|y} \overline{s}\}$$

l'ensemble appartenant à $\mathsf{Rec}(\mathcal{F}^\mathbb{N} \cup \mathcal{Q}_\mathcal{P})$ des termes représentés par $\overline{t}$. Soit $\overline{t}$ un peigne. Soit $\overline{\mathcal{A}'} = (\mathcal{Q}', \mathcal{Q}'_f, \Gamma')$ (avec $\mathcal{Q} \cap \mathcal{Q}' = \emptyset$) un automate complet déterministe qui reconnaît $\mathsf{Rep}(\overline{t})$. Un terme $\overline{s}$ a pour peigne $\overline{t}$ si et seulement si :

1. *il existe une dérivation $\ll \overline{s} \gg \rightarrow^*_{E(x,y) \rightarrow x} \overline{t}$ (en considérant la relation de réécriture classique, mais sur une signature marquée),*
2. *$\overline{s} \downarrow_{\overline{\mathcal{A}'}_\mathcal{P}} \subseteq Q'_f$ (où $\overline{\mathcal{A}'}_\mathcal{P}$ est l'automate de la définition 5.15 page 122 fabriqué pour $\overline{\mathcal{A}'}$). En effet, d'après le lemme 5.18, comme $\overline{s} \downarrow_{\overline{\mathcal{A}'}_\mathcal{P}} \subseteq Q'_f$,*

$$\mathsf{Rep}(\overline{s}) \subseteq \mathsf{Rep}(\overline{t}).$$

De plus, d'après la proposition des peignes 5.40 $\overline{s} \rightarrow^*_\mathcal{E} \overline{t}$. Nous verrons (corollaire 5.46) que cela implique que

$$\overline{t} \downarrow_{\overline{\mathcal{A}'}_\mathcal{P}} \subseteq \overline{s} \downarrow_{\overline{\mathcal{A}'}_\mathcal{P}},$$

et d'après le lemme 5.18

$$\mathsf{Rep}(\overline{t}) \subseteq \mathsf{Rep}(\overline{s}).$$

Nous avons donc

$$\mathsf{Rep}(\overline{s}) = \mathsf{Rep}(\overline{t}).$$

Il est nécessaire d'utiliser uniquement la règle de sélection $E(x,y) \to x$ dans la condition 1. En effet, si l'on regarde les règles du système D de la définition 5.31, chacune peut être simulée par une règle de sélection $E(x,y) \to x$. Ainsi, le peigne associé à $E(E(b,a),a)$ est $E(b,a)$ alors que le peigne associé à $E(a,E(b,a))$ est $E(a,b)$. Cette remarque permet de montrer que pour un peigne donné $\overline{t}$ nous pouvons fabriquer un automate qui reconnaît l'ensemble des termes ayant pour peigne $\overline{t}$. L'ensemble $\{\overline{s} \mid \lfloor \overline{s} \rfloor = \overline{t}\}$ est reconnaissable.

Lemme 5.39. *Soient $\overline{s}, \overline{t} \in \overline{\mathcal{T}}(E \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{P}})^{\leq k}$ tels que $\overline{s} \to_D \overline{t}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons*

1. $\overline{s} \odot n \circ\!\!\to^*_{\mathcal{E}} \overline{t} \odot n$,
2. $\overline{t} \odot n \circ\!\!\to^*_{\mathcal{E}} \overline{s} \odot n$.

Démonstration. Soient $\overline{s}, \overline{t} \in \overline{\mathcal{T}}(E \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{P}})^{\leq k}$ tels que $\overline{s} \to_D \overline{t}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que

$$\overline{s} \to_{D, l \to r, v} \overline{t}.$$

Soit $m = \mathsf{Card}(\mathcal{P}\mathsf{os}^{\prec v}_{\setminus E}(\overline{s})) + n$.

— **cas 1 : $l \to r = E(E(x\overline{\sigma}, y\overline{\sigma}), z\overline{\sigma}) \to E(x\overline{\sigma}, y\overline{\sigma})$ avec $z\overline{\sigma} \lhd E(x\overline{\sigma}, y\overline{\sigma})$.**
Nous avons
$$\overline{s} \odot n \circ\!\!\to_{E(x,y) \to x, v} \overline{t} \odot n,$$
et le point 1 est démontré. Pour montrer le point 2 nous allons nous servir du lemme 5.30 page 134, qui nous indique que pour tout $m \in \mathbb{N}$,
$$E(x\overline{\sigma}, y\overline{\sigma}) \odot m \circ\!\!\to^*_{\mathcal{E}} z\overline{\sigma} \odot m.$$
Nous avons la dérivation
$$\begin{aligned}
&\overline{t} \odot n = \overline{s} \odot n[E(x\overline{\sigma} \odot m, y\overline{\sigma} \odot m)]_v \\
&\circ\!\!\to_{x \to E(x,x)} \overline{s} \odot n[E(E(x\overline{\sigma} \odot m, y\overline{\sigma} \odot m), E(x\overline{\sigma} \odot m, y\overline{\sigma} \odot m))]_v \\
&\circ\!\!\to^*_{\mathcal{E}} \overline{s} \odot n[E(E(x\overline{\sigma} \odot m, y\overline{\sigma} \odot m), z\overline{\sigma} \odot m)]_v = \overline{s} \odot n.
\end{aligned}$$

— **cas 2 : $l \to r = E(E(x\overline{\sigma}, x\overline{\sigma}), y\overline{\sigma})) \to E(x\overline{\sigma}, y\overline{\sigma})$.**
Nous avons
$$\overline{s} \odot n \circ\!\!\to_{E(x,y) \to x, v \cdot 0} \overline{t} \odot n,$$
et le point 1 est démontré. Pour le point 2, nous avons la dérivation
$$\begin{aligned}
&\overline{t} \odot n = \overline{s} \odot n[E(x\overline{\sigma} \odot m, y\overline{\sigma} \odot m)]_v \\
&\circ\!\!\to_{x \to E(x,x), v} \overline{s} \odot n[E(E(x\overline{\sigma} \odot m, y\overline{\sigma} \odot m), E(x\overline{\sigma} \odot m, y\overline{\sigma} \odot m))]_v \\
&\circ\!\!\to_{x \to E(x,x), v \cdot 0} \overline{s} \odot n[E(E(E(x\overline{\sigma} \odot m, y\overline{\sigma} \odot m), E(x\overline{\sigma} \odot m, y\overline{\sigma} \odot m)), \\
&E(x\overline{\sigma} \odot m, y\overline{\sigma} \odot m))]_v \\
&\circ\!\!\to_{E(x,y) \to x, v \cdot 0 \cdot 0} \overline{s} \odot n[E(E(x\overline{\sigma} \odot m, E(x\overline{\sigma} \odot m, y\overline{\sigma} \odot m)), E(x\overline{\sigma} \odot m, y\overline{\sigma} \odot m))]_v \\
&\circ\!\!\to_{E(x,y) \to x, v \cdot 0 \cdot 1} \overline{s} \odot n[E(E(x\overline{\sigma} \odot m, x\overline{\sigma} \odot m), E(x\overline{\sigma} \odot m, y\overline{\sigma} \odot m))]_v \\
&\circ\!\!\to_{E(x,y) \to y, v \cdot 1} \overline{s} \odot n[E(E(x\overline{\sigma} \odot m, x\overline{\sigma} \odot m), y\overline{\sigma} \odot m)]_v = \overline{s} \odot n.
\end{aligned}$$

— **cas 3 : $l \to r = E(x\overline{\sigma}, x\overline{\sigma}) \to x\overline{\sigma}$.**
Il suffit d'appliquer la règle $E(x,x) \to x$ pour démontrer le point 1 et la règle $x \to E(x,x)$ pour démontrer le point 2.

$\square$

Nous pouvons maintenant démontrer la proposition des peignes. C'est un corollaire du lemme 5.39 page 138 et du corollaire 5.28.

Proposition 5.40 (Proposition des peignes)**.** *Soient* $\overline{s}, \overline{t} \in \overline{\mathcal{T}}(E \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{P}})^{\leq k}$ *tels que* $\lfloor \overline{s} \rfloor = \lfloor \overline{t} \rfloor$*. Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,*

$$\overline{s} \odot n \circ\!\!\rightarrow^*_{\mathcal{E}} \overline{t} \odot n.$$

Démonstration. Soient $\overline{s}, \overline{t} \in \overline{\mathcal{T}}(E \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{P}})^{\leq k}$ tels que $\lfloor \overline{s} \rfloor = \lfloor \overline{t} \rfloor$. Par définition,

$$\overline{s} \rightarrow^*_B \ll \overline{s} \gg \rightarrow^*_D \lfloor \overline{s} \rfloor \text{ et } \overline{t} \rightarrow^*_B \ll \overline{t} \gg \rightarrow^*_D \lfloor \overline{s} \rfloor$$

D'après le corollaire 5.28,

$$\overline{s} \circ\!\!\rightarrow^*_{\mathcal{E}} \ll \overline{s} \gg \text{ et } \ll \overline{t} \gg \circ\!\!\rightarrow^*_{\mathcal{E}} \overline{t}.$$

En appliquant plusieurs fois le lemme 5.39, nous obtenons deux dérivations

$$\ll \overline{s} \gg \circ\!\!\rightarrow^*_{\mathcal{E}} \lfloor \overline{s} \rfloor \text{ et } \lfloor \overline{t} \rfloor \circ\!\!\rightarrow^*_{\mathcal{E}} \ll \overline{t} \gg .$$

Comme $\lfloor \overline{s} \rfloor = \lfloor \overline{t} \rfloor$ nous avons une dérivation

$$\overline{s} \circ\!\!\rightarrow^*_{\mathcal{E}} \lfloor \overline{s} \rfloor \circ\!\!\rightarrow^*_{\mathcal{E}} \overline{t}.$$

$\square$

5.3.8 Définition du SCR $\mathcal{G}$

Définition 5.41. *Nous noterons* Λ_a *l'ensemble des substitutions* $\overline{\tau} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{C}^k_{k+2}$ *telles que* $\lfloor \overline{\tau} \odot a \rfloor : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{C}^k_{k+2}$*.*

Définition 5.42 (Les SCR $\mathcal{G}(\overline{l}, r, \overline{\tau})$)**.** *Soient* $l \rightarrow r \in \mathcal{R} \cup \mathcal{E}$*,* $\overline{l} \in \overline{\mathcal{T}}_E(\mathcal{V})^{\leq k}$*. Soit* $a = 0$ *si* $l \rightarrow r \in \mathcal{E}$*, et* $a = 1$ *si* $l \rightarrow r \in \mathcal{R}$*. Soit* $\mathcal{V}\mathsf{ar}(l) = \{x_1, \ldots, x_n\}$*. Soit* $\tau \in \Lambda_a$*, et soit*

$$\begin{aligned}
&L = \{\overline{l}\overline{\sigma} \mid \overline{\sigma} : \mathcal{V} \rightarrow \overline{\mathcal{T}}(E \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{P}})^{\leq k}, \forall i \in \{1, \ldots, n\}, x_i\lfloor \overline{\sigma} \rfloor = x_i\overline{\tau}\},\\
&R = \{\mathsf{lin}(r)(\overline{\sigma}) \mid \overline{\sigma} : \mathcal{V} \rightarrow \overline{\mathcal{T}}(E \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{P}})^{\leq k},\\
&\forall i \in \{1, \ldots, n\} \text{ tel que } x_i \in \mathcal{V}\mathsf{ar}(r), \forall j \in \{1, \ldots, \mathsf{Card}(\mathcal{P}\mathsf{os}(r, x_i))\},\\
&x_{i,j}\lfloor \overline{\sigma} \rfloor = x_i\lfloor \overline{\tau} \odot a \rfloor\}.
\end{aligned}$$

Nous définissons le SCR $\mathcal{G}(\overline{l}, r, \overline{\tau})$ *par :*

$$\mathcal{G}(\overline{l}, r, \overline{\tau}) := (\mathcal{F}^{\leq k} \cup \{E\} \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{P}}, \{p \rightarrow q \mid p \in L, q \in R\}).$$

Notons que pour tout terme linéaire $\overline{t} \in \overline{\mathcal{T}}(E \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{P}}, \mathcal{V})$, et toute substitution $\overline{\tau} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{C}^k_{k+2}$, l'ensemble des termes $\overline{t\sigma'}$ tels que $\lfloor \overline{\sigma'} \rfloor = \lfloor \overline{\tau} \rfloor$ est reconnaissable. Dans la définition du SCR $\mathcal{G}(\overline{l}, r, \overline{\tau})$, L et R sont donc bien reconnaissables. Le passage au linéarisé de r est indispensable pour s'assurer que R est bien un reconnaissable, et que $\mathcal{G}(\overline{l}, r, \overline{\tau})$ est bien un SCR.

Remarque 5.43. *Si l'on prend deux termes* $\overline{s} = \overline{l}\overline{\sigma_L} \in L$ *et* $\overline{t} = \mathsf{lin}(r)\overline{\sigma_R} \in \mathcal{R}$*, dans la définition du* SCR $\mathcal{G}(\overline{l}, r, \overline{\tau})$ *la condition portant sur* $\overline{\sigma_R}$

$$\forall i \text{ tel que } x_i \in \mathcal{V}\mathsf{ar}(r), \forall j \in \{1, \ldots, \mathsf{Card}(\mathcal{P}\mathsf{os}(r, x_i))\}, x_{i,j}\lfloor\overline{\sigma_R}\rfloor = x_i\lfloor\overline{\tau} \odot a\rfloor$$

ne nous aurait pas assuré seule que pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$*, pour toute variable* $x_i \in \mathcal{V}\mathsf{ar}(l) \cap \mathcal{V}\mathsf{ar}(r)$*, et pour tout* $j \in \{1, \ldots, \mathsf{Card}(\mathcal{P}\mathsf{os}(r, x_i))\}$

$$x_i\lfloor\overline{\sigma_L}\rfloor \odot a = x_{i,j}\lfloor\overline{\sigma_R}\rfloor.$$

(Ce que nous souhaitons, car grâce à la proposition des peignes 5.40 page 139, cela montre en toute généralité que ces termes sont équivalents modulo les règles de manipulation des E*, ce que nous utilisons pour démontrer que ce* SCR *simule bien des dérivations* $\mathsf{bo}(k)$ *dans* $\mathcal{R} \cup \mathcal{E}$*.)*
Nous avons de plus choisi une substitution $\overline{\tau} \in \Lambda_a$*, et pas simplement une substitution* $\overline{\tau} : \mathcal{V} \to \mathcal{C}^k_{k+2}$*, pour nous en assurer. En effet, prenons par exemple* $k = 1$*,* $\overline{l} = \mathsf{f}(x_i), \overline{r} = \mathsf{g}(x_i)$*,* $x_i\overline{\tau} = E(\mathsf{b}^0, \mathsf{b}^1)$*,* $x_i\overline{\sigma_L} = x_i\overline{\tau}$*, et* $x_{i,j}\overline{\sigma_R} = \mathsf{b}^1$*. Nous avons bien* $x_i\overline{\tau} \in \mathcal{C}^k_{k+2}$*. Et pourtant*

$$x_i\lfloor\overline{\sigma_L}\rfloor \odot 1 = x_i\lfloor\overline{\tau}\rfloor \odot 1 = E(\mathsf{b}^1, \mathsf{b}^1),$$

alors que

$$x_{i,j}\lfloor\overline{\sigma_R}\rfloor = x_i\lfloor\overline{\tau} \odot 1\rfloor = \mathsf{b}^1.$$

La condition $\overline{\tau} \in \Lambda_a$ *n'est pas respectée, et le* SCR $\mathcal{G}(\overline{l}, r, \overline{\tau})$ *n'est pas défini pour ces valeurs de* $\overline{\tau}, \overline{l}$*, et* r*.*

Définition 5.44 (Le SCR $\mathcal{G}$)**.** *Soient*

$$\mathcal{G}_{\mathcal{R}} := \{\mathcal{G}(\overline{l}, r, \overline{\tau}) \mid l \to r \in \mathcal{R}, \overline{l} \in \overline{\mathcal{T}}_E(\mathcal{V})^{\leq k}, \overline{\tau} \in \Lambda_1\},$$

$$\mathcal{G}_{\mathcal{E}} := \{\mathcal{G}(l, r, \overline{\tau}) \mid l \to r \in \mathcal{E}, \overline{\tau} \in \Lambda_0\}.$$

Nous définissons $\mathcal{G}$ *le* SCR *sur* $\mathcal{F}^{\leq k} \cup \{E\} \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{P}}$ *par :*

$$\mathcal{G} := \mathcal{G}_{\mathcal{R}} \cup \mathcal{G}_{\mathcal{E}} \cup \Gamma_{\mathcal{P}^+}{}^{\leq k}.$$

où $\Gamma_{\mathcal{P}^+}{}^{\leq k}$ *est l'ensemble des règles associées à l'automate* $\mathcal{A}_{\mathcal{P}^+}{}^{\leq k}$ *(voir définition 5.15 page 122).*

5.3.9 Lemme de projection

Le lemme de projection comme expliqué précédemment va nous permettre de simuler un pas $\mathsf{bo}(k)$ $\overline{s} \;{}_{\mathsf{bo}(k)}\!\circ\!\!\longrightarrow_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}} \overline{t}$ dans $\mathcal{R} \cup \mathcal{E}$ par une dérivation dans $\mathcal{G}$ (voir figure 32 page 142). Nous distinguerons deux cas, suivant que le pas est appliqué à une position $v \in \mathsf{Topd}_k(\overline{s})$ ou à une position $v \notin \mathsf{Topd}_k(\overline{s})$. Pour traiter le cas $v \notin \mathsf{Top}_k(\overline{s})$ nous utiliserons le corollaire 5.46 du lemme suivant.

Lemme 5.45. *Pour tout contexte* $\overline{C}[]_v \in \overline{\mathcal{T}}(E \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{P}})(\mathcal{F}^{\mathbb{N}} \cup \mathcal{E} \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{P}}, \{\square\})$ *et pour tous états* $Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q}_{\mathcal{P}}$*,*

$$Q_1 \subseteq Q_2 \Rightarrow \overline{C}[Q_1]_v \downarrow_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}{}^{\mathbb{N}}} \subseteq \overline{C}[Q_2]_v \downarrow_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}{}^{\mathbb{N}}} .$$

Démonstration. Par définition de ${\mathcal{A}_{\mathcal{P}}}^{\mathbb{N}}$, nous avons

$$\overline{C}[Q_1]_v \downarrow_{{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}}^{\mathbb{N}}} = C[Q_1]_v \downarrow_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}}, \text{ et } \overline{C}[Q_2]_v \downarrow_{{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}}^{\mathbb{N}}} = C[Q_2]_v \downarrow_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}},$$

et nous pouvons donc ignorer les marques sur $\overline{C}$ durant cette preuve. Nous démontrons le résultat par récurrence sur $n = |v|$. Si $n = 0$ alors $C[]_v = \Box$, et

$$C[Q_1]_v \downarrow_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}} = Q_1 \subseteq C[Q_2]_v \downarrow_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}} = Q_2.$$

Soit $n > 0$. Soit $i \in \mathbb{N}, w \in \mathbb{N}^*$ tel que $v = i \cdot w$. Soit $D[]_w = C[]_v/i$, et soient

$$S_1 = D[Q_1]_w \downarrow_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}}, S_2 = D[Q_2]_w \downarrow_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}} .$$

Par hypothèse de récurrence, $S_1 \subseteq S_2$. Soient

$$f = \mathsf{root}(C[]_v), a = \mathsf{arity}(f),$$

et pour tout $j \in \{0, \dots, a-1\} \backslash \{i\}$, soit

$$P_j = C[]_v/j \downarrow_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}} .$$

Nous avons

$$C[Q_1]_v \downarrow_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}} = (f(P_0, \dots, P_{i-1}, D[Q_1]_v \downarrow_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}}, P_i, \dots, P_{a-1})) \downarrow_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}}$$

et

$$C[Q_2]_v \downarrow_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}} = (f(P_0, \dots, P_{i-1}, D[Q_2]_v \downarrow_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}}, P_i, \dots, P_{a-1})) \downarrow_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}}$$

Nous distinguons deux cas.

— $\boldsymbol{f \in \mathcal{F}_a}$.
Alors

$$f(P_0, \dots, P_{i-1}, S_1, P_{i+1} \dots, P_{a-1}) \rightarrow_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}} C[Q_1]_v \downarrow_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}} = S_{f(P_0, \dots, P_{i-1}, S_1, P_{i+1} \dots, P_{a-1})},$$

et

$$f(P_0, \dots, P_{i-1}, S_2, P_{i+1} \dots, P_{a-1}) \rightarrow_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}} C[Q_2]_v \downarrow_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}} = S_{f(P_0, \dots, P_{i-1}, S_2, P_{i+1} \dots, P_{a-1})},$$

où

$$S_{f(P_0, \dots, P_{i-1}, S_1, P_{i+1} \dots, P_{a-1})} = \{q \in \mathcal{Q}_{\mathcal{A}} \mid \forall j \in \{0, \dots, a-1\} \backslash \{i\}, \exists s_j \in P_j,$$
$$\exists s_i \in S_1, f(s_0, \dots, s_{a-1}) \rightarrow q \in \Gamma\}.$$

et

$$S_{f(P_0, \dots, P_{i-1}, S_2, P_{i+1} \dots, P_{a-1})} = \{q \in \mathcal{Q}_{\mathcal{A}} \mid \forall j \in \{0, \dots, a-1\} \backslash \{i\}, \exists s_j \in P_j,$$
$$\exists s_i \in S_2, f(s_0, \dots, s_{a-1}) \rightarrow q \in \Gamma_{\mathcal{A}}\}.$$

Puisque $S_1 \subseteq S_2$,

$$S_{f(P_0, \dots, P_{i-1}, S_1, P_{i+1} \dots, P_{a-1})} \subseteq S_{f(P_0, \dots, P_{i-1}, S_2, P_{i+1} \dots, P_{a-1})},$$

et le résultat est vérifié.

$$
\begin{tikzcd}
\overline{s} \arrow[rr, "k"' near start, "\mathcal{R}\cup\mathcal{E}"'] \arrow[d, "\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{\geq k+1}"', "*" near end] & & \overline{t} \arrow[d, "\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{\geq k+1}"', "*" near end] \\
\mathsf{Top}(\overline{s}) \arrow[r, dashed, "*", "\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{+\leq k}"'] & \overline{s'} \arrow[r, dashed, "*", "\mathcal{G}(\overline{l}, r, \overline{\tau})"'] & \mathsf{Top}(\overline{t})
\end{tikzcd}
$$

FIGURE 32 – Lemme de projection.

— $\boldsymbol{f = E}$.
Alors $a = 2$ et $i = 0$ où $i = 1$. Supposons que $i = 0$ (l'autre cas $i = 1$ se traite de la même manière). Nous avons

$$E(S_1, P_1) \to_{\mathcal{A}_\mathcal{P}} C[Q_1]_v \downarrow_{\mathcal{A}_\mathcal{P}^+} = S_1 \cup P_1$$

et

$$E(S_2, P_1) \to_{\mathcal{A}_\mathcal{P}{}^{\mathbb{N}}} C[Q_2]_v \downarrow_{\mathcal{A}_\mathcal{P}^+} = S_2 \cup P_1.$$

Puisque $S_1 \subseteq S_2$, $S_1 \cup P_1 \subseteq S_2 \cup P_2$ et le résultat est vérifié.

□

Corollaire 5.46. *Soient $\overline{s}, \overline{t} \in \overline{\mathcal{T}}_E$ tels que $\overline{s} \circ\!\!\to_\mathcal{E} \overline{t}$. Nous avons*

$$\overline{t} \downarrow_{\mathcal{A}_\mathcal{P}{}^{\mathbb{N}}} \subseteq \overline{s} \downarrow_{\mathcal{A}_\mathcal{P}{}^{\mathbb{N}}} .$$

Démonstration. Soit

$$\overline{s} \circ\!\!\to_{\mathcal{E}, l \to r, \overline{\sigma}, v} \overline{t}.$$

Rappelons que pour tout terme $\overline{t} \downarrow_{\mathcal{A}_\mathcal{P}{}^{\mathbb{N}}} = t \downarrow_{\mathcal{A}_\mathcal{P}}$ par définition de l'automate $\mathcal{A}_\mathcal{P}{}^{\mathbb{N}}$. Nous distinguons trois cas.

— $\boldsymbol{l \to r = x \to E(x, x)}$.
Dans ce cas,

$$\overline{s}/v \downarrow_{\mathcal{A}_\mathcal{P}{}^{\mathbb{N}}} = x\sigma \downarrow_{\mathcal{A}_\mathcal{P}} \text{ et } \overline{t}/v \downarrow_{\mathcal{A}_\mathcal{P}{}^{\mathbb{N}}} = E(x\sigma, x\sigma) \downarrow_{\mathcal{A}_\mathcal{P}} = x\sigma \downarrow_{\mathcal{A}_\mathcal{P}},$$

le résultat est vérifié.

— $\boldsymbol{l \to r = E(x, y) \to x}$.
Dans ce cas,

$$\overline{s}/v \downarrow_{\mathcal{A}_\mathcal{P}{}^{\mathbb{N}}} = x\sigma \downarrow_{\mathcal{A}_\mathcal{P}} \cup y\sigma \downarrow_{\mathcal{A}_\mathcal{P}} \text{ et } \overline{t}/v \downarrow_{\mathcal{A}_\mathcal{P}{}^{\mathbb{N}}} = x\sigma \downarrow_{\mathcal{A}_\mathcal{P}}$$

Comme $\overline{t}/v \downarrow_{\mathcal{A}_\mathcal{P}{}^{\mathbb{N}}} \subseteq \overline{s}/v \downarrow_{\mathcal{A}_\mathcal{P}{}^{\mathbb{N}}}$, d'après le lemme 5.45 page 140,

$$\overline{t} \downarrow_{\mathcal{A}_\mathcal{P}^{\mathbb{N}}} \subseteq \overline{s} \downarrow_{\mathcal{A}_\mathcal{P}^{\mathbb{N}}} .$$

— $\boldsymbol{l \to r = E(x, y) \to y}$.
Ce cas est similaire au cas précédent.

□

Lemme 5.47 (Lemme de projection)**.** *Soient* $\overline{s}$, $\overline{t} \in \overline{\mathcal{T}}(E \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{P}}), a \in \{0, 1\}$*, tels que* $\overline{s}$ *est bien marqué pour* k *et*

$$\overline{s} = \overline{s}[\overline{l\sigma}]_v \ {}_{\mathsf{bo}(k)}\!\circ\!\!\longrightarrow_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}} \overline{t} = \overline{s}[r(\overline{\sigma} \odot a)]_v.$$

1. *Si* $v \in \mathsf{Topd}_k(\overline{s})$ *alors il existe un terme* $\overline{s'} \in \overline{\mathcal{T}}(E \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{P}})^{\leq k}$ *et une substitution* $\overline{\tau} : \mathcal{V} \to \Lambda_a$ *tels que* $\mathcal{G}(\bar{l}, r, \overline{\tau})$ *est bien défini et*
$$\mathsf{Top}_k(\overline{s}) \to^*_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{\leq k}} \overline{s'} \to_{\mathcal{G}(\bar{l},r,\overline{\tau})} \mathsf{Top}_k(\overline{t}),$$
2. *sinon,*
$$\mathsf{Top}_k(\overline{s}) \to^*_{\mathcal{A}^{+\,\leq k}_{\mathcal{P}}} \mathsf{Top}_k(\overline{t}).$$

Démonstration. Soient $\overline{s}$, $\overline{t} \in \overline{\mathcal{T}}(E \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{P}}), a \in \{0, 1\}$, tels que $\overline{s}$ est bien marqué pour k et

$$\overline{s} = \overline{s}[\overline{l\sigma}]_v \ {}_{\mathsf{bo}(k)}\!\circ\!\!\longrightarrow_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}} \overline{t} = \overline{s}[r(\overline{\sigma} \odot a)]_v.$$

Cas 1 : $\boldsymbol{v \in \mathsf{Topd}_k(\overline{s})}$**.**
D'après le lemme 5.24 page 129, nous avons

$$\mathsf{Top}_k(\overline{s}) = \mathsf{Top}_k(\overline{s})[\bar{l}\mathsf{Top}_k(\overline{\sigma})]_v, \mathsf{Top}_k(\overline{t}) = \mathsf{Top}_k(\overline{s})[r\mathsf{Top}_k(\overline{\sigma} \odot a)]_v.$$

D'après le lemme 5.25 page 130, pour tout $x \in \mathcal{V}\mathsf{ar}(l)$, il existe $\overline{t_x}$ tel que

$$x\mathsf{Top}_k(\overline{\sigma}) \to_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{\leq k}} \overline{t_x} \text{ et } \overline{t_x} \odot a = x\mathsf{Top}_k(\overline{\sigma} \odot a).$$

Soit $\overline{\sigma'} : x \to \overline{t_x}$. Nous avons

$$\mathsf{Top}_k(\overline{s}) \to_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{\leq k}} \overline{s}[\overline{l\sigma'}]_v \text{ et } \overline{s}[r(\overline{\sigma'} \odot a)]_v = \mathsf{Top}_k(\overline{t}).$$

Montrons que $\mathcal{G}(\bar{l}, r, \lfloor\overline{\sigma'}\rfloor)$ est bien défini. Nous avons bien $\bar{l} \in \overline{\mathcal{T}}_E(\mathcal{V})^{\leq k}$ puisque le pas est $\mathsf{bo}(k)$. Il reste à montrer que $\lfloor\overline{\sigma}'\rfloor \in \Lambda_a$ pour conclure que le SCR est bien défini. Soit $x \in \mathcal{V}\mathsf{ar}(l)$. Comme $x\overline{\sigma'} \odot a = x\mathsf{Top}_k(\overline{\sigma} \odot a)$ d'après le lemme 5.22 page 127,

$$x\overline{\sigma'} \odot a \in \overline{\mathcal{T}}(E \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{P}})^{\leq k} \text{ et } dpt_{\setminus E}(x\overline{\sigma'}) \leq k + 2 - a.$$

Nous avons donc

$$x\lfloor\overline{\sigma'}\rfloor \in \mathcal{C}^k_{k+2} \text{ et } x\lfloor\overline{\sigma'} \odot a\rfloor \in \mathcal{C}^{\leq k}_{\leq k+2}.$$

Ceci suffit pour que $\mathcal{G}(\bar{l}, r, \lfloor\overline{\sigma'}\rfloor)$ soit bien défini.
Soient $\mathcal{V}\mathsf{ar}(l) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Soient

$$L = \{\bar{l}\overline{\tau} \mid \overline{\tau} : \mathcal{V} \to \overline{\mathcal{T}}(E \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{P}})^{\leq k}, \forall i \in \{1, \ldots, n\}, x_i\lfloor\overline{\tau}\rfloor = x_i\lfloor\overline{\sigma'}\rfloor\},$$

$$R = \{\mathsf{lin}(r)\overline{\tau} | \overline{\tau} : \mathcal{V} \to \overline{\mathcal{T}}(E \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{P}})^{\leq k}, \forall i \text{ tel que } x_i \in \mathcal{V}\mathsf{ar}(r), \forall j \in \{1, \ldots, \mathsf{Card}(\mathcal{P}\mathsf{os}(r, x_i))\},$$
$$x_{i,j}\lfloor\overline{\tau}\rfloor = x_i\lfloor\lfloor\overline{\sigma'}\rfloor \odot a\rfloor\}.$$

Nous avons

$$\mathcal{G}(\bar{l}, r, \lfloor\overline{\sigma'}\rfloor) := (\mathcal{F}^{\leq k} \cup \{E\} \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{P}}, \{p \to q \mid p \in L, q \in R\}).$$

Clairement, $\overline{l\sigma'} \in L$. D'après le lemme 5.36 page 136,

$$\lfloor\overline{\sigma'} \odot a\rfloor = \lfloor\lfloor\overline{\sigma'}\rfloor \odot a\rfloor,$$

et $r(\overline{\sigma'} \odot a) \in R$. Nous avons donc

$$\overline{l\sigma'} \to r(\overline{\sigma'} \odot a) \in \mathcal{G}(\overline{l}, r, \lfloor\overline{\sigma'}\rfloor).$$

et une dérivation

$$\mathsf{Top}_k(\overline{s}) \to_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{\leq k}} \overline{s}[\overline{l\sigma'}]_v \to_{\mathcal{G}(\overline{l},r,\lfloor\overline{\sigma'}\rfloor)} \mathsf{Top}_k(\overline{t}) = \overline{s}[r(\overline{\sigma'} \odot a)]_v.$$

Cas 2 : $v \notin \mathsf{Topd}_k(\overline{s})$.
Comme $v \notin \mathsf{Topd}_k(\overline{s})$, il existe $z \prec v$ tel que $\mathsf{m}(\overline{s}/z) \geq k+1$. Comme $\overline{s}$ est bien marqué pour k, il existe $u \in \mathcal{P}\mathsf{os}_{\mathcal{F}}(s), u \prec v$ tel que

— $\forall w \prec u, \mathsf{m}(\overline{t}/w) \leq k$,

— $\forall w \succeq u$ tel que $w \in \mathcal{P}\mathsf{os}_{\mathcal{F}}(t)$,

$$\mathsf{m}(\overline{s}/w) = k + 1 + \mathsf{Card}(\mathcal{P}\mathsf{os}_{\setminus\{E\}}{}^{\prec w}(s)) - \mathsf{Card}(\mathcal{P}\mathsf{os}_{\setminus\{E\}}{}^{\prec u}(s))$$

(en particulier, $\mathsf{m}(\overline{s}/u) = k+1$).

Montrons par l'absurde que $l \to r \in \mathcal{E}$. Supposons que $l \to r \in \mathcal{R}$ et montrons que nous aboutissons à une contradiction. Nous distinguons deux cas.

— $\boldsymbol{l \in \mathcal{V}}$.
Le pas étant $\mathsf{bo}(k)$, nous aurions $\forall w \prec v, \mathsf{m}(\overline{s}/w) \leq k$. Ceci n'est pas vérifié puisque $\mathsf{m}(\overline{s}/u) = k+1$. Ce cas ne peut donc pas se produire.

— $\boldsymbol{l \notin \mathcal{V}}$.
Le pas étant $\mathsf{bo}(k)$, nous aurions $\mathsf{m}(\overline{s}/v) = \mathsf{m}(\overline{l}) \leq k$. Or, $\mathsf{m}(\overline{s}/v) \geq k+1$ puisque $v \succ u$. Ce cas ne peut pas se produire.

Nous avons donc $l \to r \in \mathcal{E}$.
Comme $\mathsf{m}(\overline{t}/u) = \mathsf{m}(\overline{s}/u) = k+1$, d'après le lemme 5.23 page 128,

$$\mathsf{Top}_k(\overline{s}) = \mathsf{Top}_k(\overline{s})[\overline{s}/u\downarrow_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{\geq k+1}}]_u,$$

et

$$\mathsf{Top}_k(\overline{t}) = \mathsf{Top}_k(\overline{s})[\overline{t}/u\downarrow_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{\geq k+1}}]_u.$$

De plus, comme $\overline{s}/v \;{}_{\mathsf{bo}(k)}{\circ\!\!\to}_{\mathcal{E}}\; \overline{t}/v$,

$$\overline{s}/u \;{}_{\mathsf{bo}(k)}{\circ\!\!\to}_{\mathcal{E}}\; \overline{t}/u$$

et d'après le corollaire 5.46 page 142

$$\overline{t}/u\downarrow_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{\geq k+1}} \subseteq \overline{s}/u\downarrow_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{\geq k+1}}.$$

Nous avons donc $s/u\downarrow_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}} \to t/u\downarrow_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}} \in \Gamma_{\mathcal{P}}^{+}$ et

$$\mathsf{Top}_k(\overline{s}) = \mathsf{Top}_k(\overline{s})[\overline{s}/u\downarrow_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{\geq k+1}}]_u \to_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{+\leq k},u} \mathsf{Top}_k(\overline{t}) = \mathsf{Top}_k(\overline{s})[\overline{t}/u\downarrow_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{\geq k+1}}]_u.$$

□

Exemple 5.48. *Soit $k=1$. Le premier exemple que nous donnons correspond au cas où la règle est appliquée à une position appartenant à $\mathsf{Topd}_1(\overline{s})$. Dans le système $\mathcal{R}_{11} = \{\mathsf{h}(\mathsf{i}(x), y) \to \mathsf{h}(x, x)\}$ nous avons le pas* $\mathsf{bo}(1)$

$$\begin{aligned} \overline{s} &= \mathsf{h}(\mathsf{i}^1(E(E(\mathsf{g}(\mathsf{a}), \mathsf{g}(\mathsf{a})), \mathsf{g}^1(\mathsf{a}^2))), \mathsf{b}^2) \\ {}_{\mathsf{bo}(0)}{\circ\!\!\to}\; \overline{t} &= \mathsf{h}(E(E(\mathsf{g}^1(\mathsf{a}^2), \mathsf{g}^1(\mathsf{a}^2)), \mathsf{g}^1(\mathsf{a}^2)), E(E(\mathsf{g}^1(\mathsf{a}^2), \mathsf{g}^1(\mathsf{a}^2)), \mathsf{g}^1(\mathsf{a}^2))). \end{aligned}$$

Si l'on considère l'automate $\mathcal{A} = (\mathcal{F}, \mathcal{Q}, \mathcal{Q}_f, \Gamma)$ *de l'exemple 5.16, où*

$$\Gamma = \{\mathsf{a} \to q_f, \mathsf{b} \to q, \mathsf{c} \to q, \mathsf{f}(q_f) \to q_f, \mathsf{i}(q_f) \to q_f, \mathsf{h}(q_f, q_f) \to q_f, \\ \mathsf{g}(q_f) \to q_f, \mathsf{f}(q) \to q, \mathsf{g}(q) \to q, \mathsf{i}(q) \to q, \mathsf{h}(q, q) \to q, \mathsf{h}(q, q_f) \to q, \mathsf{h}(q_f, q) \to q\},$$

on a

$$\mathsf{Top}_1(\overline{s}) = \mathsf{h}(\mathsf{i}^1(E(E(\mathsf{g}(\mathsf{a}), \mathsf{g}(\mathsf{a})), \mathsf{g}^1(\{q_f\}))), \{q\}),$$
$$\mathsf{Top}_1(\overline{t}) = \mathsf{h}(E(E(\mathsf{g}^1(\{q_f\}), \mathsf{g}^1(\{q_f\})), \mathsf{g}^1(\{q_f\})), E(E(\mathsf{g}^1(\{q_f\}), \mathsf{g}^1(\{q_f\})), \mathsf{g}^1(\{q_f\}))).$$

Il y a une dérivation

$$\mathsf{h}(\mathsf{i}^1(E(E(\mathsf{g}(\mathsf{a}), \mathsf{g}(\mathsf{a})), \mathsf{g}^1(\{q_f\}))), \{q\}) \to^2_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{\mathbb{N}}} \mathsf{h}(\mathsf{i}^1(E(E(\mathsf{g}(\{q_f\}), \mathsf{g}(\{q_f\})), \mathsf{g}^1(\{q_f\}))), \{q\}).$$

La règle

$$\mathsf{h}(\mathsf{i}^1(E(E(\mathsf{g}(\{q_f\}), \mathsf{g}(\{q_f\})), \mathsf{g}^1(\{q_f\}))), \{q\}) \\ \to \mathsf{h}(E(E(\mathsf{g}^1(\{q_f\}), \mathsf{g}^1(\{q_f\})), \mathsf{g}^1(\{q_f\})), E(E(\mathsf{g}^1(\{q_f\}), \mathsf{g}^1(\{q_f\})), \mathsf{g}^1(\{q_f\})))$$

appartient au SCR $\mathcal{G}(\overline{l}, r, \overline{\tau})$ *construit pour* $k = 1$*, et où* $\overline{l} = \mathsf{h}(\mathsf{i}^1(x), y)$, $r = \mathsf{h}(x, x)$*, et* τ *est la substitution qui à* x *associe le peigne* $E(\mathsf{g}(\{q_f\}), \mathsf{g}^1(\{q_f\}))$ *et à* y *le peigne* $\{q\}$*. En effet, nous avons bien*

$$\lfloor E(E(\mathsf{g}(\{q_f\}), \mathsf{g}(\{q_f\})), \mathsf{g}^1(\{q_f\})) \rfloor = E(\mathsf{g}(\{q_f\}), \mathsf{g}^1(\{q_f\})) = x\overline{\tau}$$

et

$$\lfloor E(E(\mathsf{g}^1(\{q_f\}), \mathsf{g}^1(\{q_f\})), \mathsf{g}^1(\{q_f\})) \rfloor = \mathsf{g}^1(\{q_f\}) = \lfloor x\overline{\tau} \odot 1 \rfloor.$$

Il y a donc une dérivation

$$\mathsf{Top}_1(\overline{s}) \to^*_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{\mathbb{N}}} \mathsf{h}(\mathsf{i}^1(E(E(\mathsf{g}(\{q_f\}), \mathsf{g}(\{q_f\})), \mathsf{g}(\{q_f\}))), \{q\}) \\ \to_{\mathcal{G}} \mathsf{Top}_1(\overline{t}) = \mathsf{h}(E(E(\mathsf{g}^1(\{q_f\}), \mathsf{g}^1(\{q_f\})), \mathsf{g}^1(\{q_f\})), E(E(\mathsf{g}^1(\{q_f\}), \mathsf{g}^1(\{q_f\})), \mathsf{g}^1(\{q_f\}))).$$

Dans le deuxième exemple, nous traitons le cas où la règle est appliquée à une position n'appartenant pas à $\mathsf{Topd}_1(\overline{s})$ *(c'est donc une règle de* $\mathcal{E}$ *qui est appliquée). Nous avons le pas*

$$\mathsf{f}^1(E(\mathsf{a}^2, \mathsf{b}^2)) \to_{E(x,x) \to x} \mathsf{f}^1(\mathsf{a}^2).$$

On a la dérivation voulue (toujours en considérant $\mathcal{A}$*)*

$$\mathsf{Top}_1(\mathsf{f}^1(E(\mathsf{a}^2, \mathsf{b}^2))) = \mathsf{f}^1(\{q, q_f\}) \to_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^+, \{q, q_f\} \to \{q_f\}, 0} \mathsf{Top}_1(\mathsf{f}^1(\mathsf{a}^2)) = \mathsf{f}(\{q_f\}).$$

5.3.10 Lemme de relèvement

Le lemme de relèvement permet de simuler une dérivation $\overline{s} \to^*_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{+\mathbb{N}}} \overline{s'} \to_{\mathcal{G}} \overline{t}$ par une dérivation $\mathsf{bo}(k)$ dans $\mathcal{R} \cup \mathcal{E}$ suivie par une dérivation dans $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{+\mathbb{N}}$. Ce lemme est illustré par la figure 33 page 147. Nous avons besoin d'un résultat intermédiaire pour démontrer ce lemme. Il nous faut d'abord démontrer qu'il est possible de réorganiser une dérivation $\overline{s} \to^*_{\mathcal{E} \cup \mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{+\mathbb{N}}} \overline{t}$ en une dérivation $\overline{s} \circ\!\!\to^*_{\mathcal{E}} \to^*_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{+\mathbb{N}}} \overline{t}$. C'est un corollaire du lemme qui suit.

Lemme 5.49. *Soient* $\overline{s}, \overline{t'}, \overline{t} \in \overline{\mathcal{T}}(E \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{P}})$. *Si* $\overline{s} \to^*_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{+\mathbb{N}}} \overline{t'} \circ\!\!\to_{\mathcal{E}} \overline{t}$ *alors il existe* $\overline{s'}$ *tel que* $\overline{s} \circ\!\!\to_{\mathcal{E}} \overline{s'} \to^*_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{+\mathbb{N}}} \overline{t}$.

Démonstration. Nous avons

$$\overline{t'} = \overline{t'}[l\overline{\sigma}]_v \circ\!\!\to_{\mathcal{E},l\to r,\overline{\sigma},v} \overline{t} = \overline{t'}[r(\overline{\sigma} \odot 0)]_v.$$

Puisque $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{+\mathbb{N}}$ est un automate de bas en haut

$$\overline{s}[]_v \to^*_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{+\mathbb{N}}} \overline{t'}[]_v,$$

et il existe une substitution $\overline{\sigma'}$ telle que

$$\overline{s} = \overline{s}[\overline{l\sigma'}]_v,$$

et telle que pour tout $x \in \mathcal{V}\mathsf{ar}(l)$,

$$x\overline{\sigma'} \to^*_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{+\mathbb{N}}} x\overline{\sigma}.$$

et par définition de $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}{}^{\mathbb{N}}$, pour tout $x \in \mathcal{V}\mathsf{ar}(l)$,

$$x\overline{\sigma'} \odot 0 \to^*_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{+\mathbb{N}}} x\overline{\sigma} \odot 0.$$

Il y a donc une dérivation

$$\overline{s} = \overline{s}[l\overline{\sigma'}]_v \circ\!\!\to_{l\to r} \overline{s}[r(\overline{\sigma'} \odot 0)]_v \to^*_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{+\mathbb{N}}} \overline{t'}[r(\overline{\sigma} \odot 0)]_v = \overline{t}.$$

Le résultat est vérifié en prenant $\overline{s'} = \overline{s}[r(\overline{\sigma'} \odot 0)]_v$. □

Corollaire 5.50. *Soient* $\overline{s}, \overline{t'}, \overline{t} \in \overline{\mathcal{T}}(E \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{P}})$. *Si* $\overline{s} \to^*_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}{}^{+\mathbb{N}}} \overline{t'} \circ\!\!\to^*_{\mathcal{E}} \overline{t}$ *alors il existe* $\overline{s'}$ *tel que*

$$\overline{s} \circ\!\!\to^*_{\mathcal{E}} \overline{s'} \to^*_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}{}^{+\mathbb{N}}} \overline{t}.$$

Démonstration. Nous raisonnons par récurrence sur n la longueur de la dérivation de $\overline{t'}$ à $\overline{t}$

$$\overline{s} \to^*_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}{}^{+\mathbb{N}}} \overline{t'} \circ\!\!\to^n_{\mathcal{E}} \overline{t}.$$

Si $n = 0$ le résultat est vérifié. Soit $n > 0$, et soit $\overline{t''}$ tel que

$$\overline{s} \to^*_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}{}^{+\mathbb{N}}} \overline{t'} \circ\!\!\to_{\mathcal{E}} \overline{t''} \circ\!\!\to^{n-1}_{\mathcal{E}} \overline{t}.$$

D'après le lemme 5.49 page 146, il existe $\overline{s_1}$ tel que

$$\overline{s} \circ\!\!\to^*_{\mathcal{E}} \overline{s_1} \to^*_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}{}^{+\mathbb{N}}} \overline{t''} \circ\!\!\to^{n-1}_{\mathcal{E}} \overline{t}.$$

Par hypothèse de récurrence sur $\overline{s_1} \to^*_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}{}^{+\mathbb{N}}} \overline{t''} \circ\!\!\to^{n-1}_{\mathcal{E}} \overline{t}$, il existe $\overline{s_2}$ tel que

$$\overline{s_1} \circ\!\!\to^*_{\mathcal{E}} \overline{s_2} \to^*_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}{}^{+\mathbb{N}}} \overline{t}.$$

Ainsi,

$$\overline{s} \circ\!\!\to^*_{\mathcal{E}} \overline{s_1} \circ\!\!\to^*_{\mathcal{E}} \overline{s_2} \to^*_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}{}^{+\mathbb{N}}} \overline{t},$$

et le résultat est vérifié en choisissant $\overline{s'} = \overline{s_2}$.

□

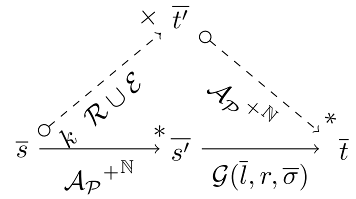

FIGURE 33 – Lemme de relèvement.

Nous pouvons maintenant démontrer le lemme de relèvement.

Lemme 5.51 (Lemme de relèvement)**.** *Soient $l \to r \in \mathcal{R} \cup \mathcal{E}$, $\bar{l} \in \overline{\mathcal{T}}(E \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{P}})^{\leq k}$. Soit $a = 0$ si $l \to r \in \mathcal{E}$ et $a = 1$ si $l \to r \in \mathcal{R}$. Soient $\overline{\tau} \in \Lambda_a$ une substitution, $\overline{s} \in \overline{\mathcal{T}}_E$, $\overline{s'}$, $\bar{t} \in \overline{\mathcal{T}}(E \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{P}})^{\leq k}$ tels que*

$$\overline{s} \to^*_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{+\mathbb{N}}} \overline{s'} \to_{\mathcal{G}(\bar{l}, r, \overline{\tau})} \bar{t}.$$

Il existe $\overline{t'} \in \overline{\mathcal{T}}_E$ tel que

$$\overline{s} \;{}_{\mathsf{bo}(k)}\!\circ\!\!\to^+_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}} \overline{t'} \to^*_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{+\mathbb{N}}} \bar{t}.$$

Démonstration. Soient $\mathcal{V}\mathsf{ar}(l) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $\mathcal{V}\mathsf{ar}(r) = \{x_1, \ldots, x_m\}$. Soit $a = 0$ si $l \to r \in \mathcal{E}$, $a = 1$ si $l \to r \in \mathcal{R}$. Par définition il existe une position v, deux substitutions $\overline{\sigma_0} : \mathcal{V} \to \overline{\mathcal{T}}(E \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{P}})^{\leq k}$ et $\overline{\sigma_1} : \mathcal{V} \to \overline{\mathcal{T}}(E \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{P}})^{\leq k}$, telles que

$$\overline{s'} = \overline{s'}[\bar{l}\overline{\sigma_0}]_v \ , \ \bar{t} = \overline{s'}[\mathsf{lin}(r)\overline{\sigma_1}]_v \ ,$$

pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\lfloor x_i \overline{\sigma_0} \rfloor = x_i \overline{\tau},$$

et pour tout i tel que $x_i \in \mathcal{V}\mathsf{ar}(r)$, pour tout $j \in \{1, \ldots, \mathsf{Card}(\mathcal{P}\mathsf{os}(r, x_i))\}$,

$$\lfloor x_{i,j} \overline{\sigma_1} \rfloor = \lfloor x_i \overline{\tau} \odot a \rfloor.$$

Comme $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{+\mathbb{N}}$ est un automate de bas en haut, nous avons

$$\overline{s}[]_v \to^*_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{+\mathbb{N}}} \overline{s'}[]_v,$$

et il existe une substitution $\overline{\sigma_2} : \mathcal{V} \to \overline{\mathcal{T}}_E$ telle que

$$\overline{s} = \overline{C}[\bar{l}\overline{\sigma_2}]_v \text{ et pour tout } i \in \{1, \ldots, n\}, \ x_i \overline{\sigma_2} \to^*_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{+\mathbb{N}}} x_i \overline{\sigma_0}.$$

Par définition de $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{+\mathbb{N}}$, pour tout i tel que $x_i \in \mathcal{V}\mathsf{ar}(r)$, $x_i \overline{\sigma_2} \odot a \to^*_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{+\mathbb{N}}} x_i \overline{\sigma_0} \odot a$, et donc

$$\overline{s}[r(\overline{\sigma_2} \odot a)]_v \to^*_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{+\mathbb{N}}} \overline{s'}[r(\overline{\sigma_0} \odot a)]_v.$$

Comme $\bar{t} \in \overline{\mathcal{T}}(E \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{P}})^{\leq k}$, les marques sur $\bar{l}$ sont inférieures ou égales à k ($\bar{l} \in \mathcal{T}(\mathcal{F}^{\leq k}, \mathcal{V})$), et toutes les marques au-dessus de v sont inférieures ou égales à k ($\forall u \prec v, \mathsf{m}(\overline{s}/u) \leq k$). Ceci nous assure que quel que soit le cas ($l \in \mathcal{V}$ ou $l \notin \mathcal{V}$), il existe un pas de dérivation $\mathsf{bo}(k)$

$$\overline{s}[\overline{l}\overline{\sigma_2}]_v \ {}_{\mathsf{bo}(k)}{\circ\!\!\longrightarrow}_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E},l\to r,v} \overline{s}[r(\overline{\sigma_2}\odot a)]_v \to^*_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{+\mathbb{N}}} \overline{s'}[r(\overline{\sigma_0}\odot a)]_v.$$

Soit $i \in \{1,\ldots,n\}$. Puisque $\lfloor x_i\overline{\sigma_0}\rfloor = x_i\overline{\tau}$, d'après le lemme 5.36 page 136

$$\lfloor x_i\overline{\sigma_0}\odot a\rfloor = \lfloor x_i\lfloor\overline{\tau}\rfloor\odot a\rfloor.$$

De plus pour tout $i \in \{1,\ldots,m\}$, pour tout $j \in \{1,\ldots,\mathsf{Card}(\mathcal{P}\mathsf{os}(r,x_i))\}$,

$$\lfloor x_{i,j}\overline{\sigma_1}\rfloor = \lfloor x_i\lfloor\overline{\tau}\rfloor\odot a\rfloor.$$

Nous avons donc

$$\lfloor x_{i,j}\overline{\sigma_1}\rfloor = \lfloor x_i\overline{\sigma_0}\odot a\rfloor,$$

et d'après la proposition des peignes 5.39

$$x_i\overline{\sigma_0}\odot a \ {\circ\!\!\longrightarrow}^*_{\mathcal{E}} x_{i,j}\overline{\sigma_1}\odot a = x_{i,j}\overline{\sigma_1},$$

et

$$\overline{s'}[r(\overline{\sigma_0}\odot a)]_v \ {\circ\!\!\longrightarrow}^*_{\mathcal{E}} \overline{t} = \overline{s'}[\mathsf{lin}(r)\overline{\sigma_1}]_v.$$

Nous avons construit une dérivation

$$\overline{s} \ {}_{\mathsf{bo}(k)}{\circ\!\!\longrightarrow}_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E},l\to r,v} \overline{s}[r(\overline{\sigma_2}\odot a)]_v \to^*_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{+\mathbb{N}}} \overline{s'}[r(\overline{\sigma_0}\odot a)] \ {}_{\mathsf{bo}(k)}{\circ\!\!\longrightarrow}^*_{\mathcal{E}} \overline{t}$$

(Rappelons que tous les pas dans $\mathcal{E}$ sont $\mathsf{bo}(k)$ par définition.)
Le corollaire 5.50 page 146 nous permet d'inverser les pas dans $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{+\mathbb{N}}$ avec ceux dans $\mathcal{E}$ et nous obtenons la dérivation voulue

$$\overline{s} \ {}_{\mathsf{bo}(k)}{\circ\!\!\longrightarrow}_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E},l\to r,v} \ {}_{\mathsf{bo}(k)}{\circ\!\!\longrightarrow}^*_{\mathcal{E}} \ {}_{\mathsf{bo}(k)}{\circ\!\!\longrightarrow}_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{+\mathbb{N}}} \overline{t}.$$

□

Exemple 5.52. *Si nous reprenons le système $\mathcal{R}_{11} = \{\mathsf{h}(\mathsf{i}(x),y) \to \mathsf{h}(x,x)\}$ et $k = 1$, alors nous avons la dérivation suivante*

$$\begin{aligned} \overline{s} &= \mathsf{h}(\mathsf{i}^1(E(E(\mathsf{g}(\mathsf{a}),\mathsf{g}(\mathsf{a})),\mathsf{g}^1(\mathsf{a}^2))),\mathsf{b}^2) \\ \to_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{\mathbb{N}}} \overline{s'} &= \mathsf{h}(\mathsf{i}^1(E(E(\mathsf{g}(\mathsf{a}),\mathsf{g}(\mathsf{a})),\mathsf{g}^1(\{q_f\}))),\{q\}) \\ \to_{\mathcal{G}(\overline{l},r,\overline{\tau})} \overline{t} &= \mathsf{h}(E(\mathsf{g}^1(\{q_f\}),\mathsf{g}^1(\{q_f\})),\mathsf{g}^1(\{q_f\})). \end{aligned}$$

En effet, si on prend $\overline{l} = \mathsf{h}(\mathsf{i}^1(x),y)$, $r = \mathsf{h}(x,x)$
(et donc $\mathsf{lin}(r) = \mathsf{h}(x_1,x_2)$), $x\overline{\tau} = E(\mathsf{g}(\mathsf{a}),\mathsf{g}^1(\{q_f\}))$, $y\overline{\tau} = \{q_f\}$, alors on a bien

$$\begin{aligned} \lfloor E(E(\mathsf{g}(\mathsf{a}),\mathsf{g}(\mathsf{a})),\mathsf{g}^1(\{q_f\}))\rfloor &= x\overline{\tau}, \\ \lfloor E(\mathsf{g}^1(\{q_f\}),\mathsf{g}^1(\{q_f\}))\rfloor &= \mathsf{g}^1(\{q_f\}) = \lfloor x\overline{\tau}\odot 1\rfloor, \\ \lfloor \mathsf{g}^1(\{q_f\})\rfloor &= \mathsf{g}^1(\{q_f\}) = \lfloor x\overline{\tau}\odot 1\rfloor. \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} &\mathsf{h}(\mathsf{i}^1(E(E(\mathsf{g}(\mathsf{a}),\mathsf{g}(\mathsf{a})),\mathsf{g}^1(\{q_f\}))),\{q\}) \\ &\to \mathsf{h}(E(\mathsf{g}^1(\{q_f\}),\mathsf{g}^1(\{q_f\})),\mathsf{g}^1(\{q_f\})) \in \mathcal{G}(\overline{l},r,\overline{\tau}). \end{aligned}$$

Il y a un pas $\mathsf{bo}(1)$

$$\begin{aligned}\overline{s} =& \mathsf{h}(\mathsf{i}^1(E(E(\mathsf{g}(\mathsf{a}),\mathsf{g}(\mathsf{a})),\mathsf{g}^1(\mathsf{a}^2))),\mathsf{b}^2)\\ &\circ\!\!\to_{\mathsf{bo}(1),0} \mathsf{h}(E(E(\mathsf{g}^1(\mathsf{a}^2),\mathsf{g}^1(\mathsf{a}^2)),\mathsf{g}^1(\mathsf{a}^2)),E(E(\mathsf{g}^1(\mathsf{a}^2),\mathsf{g}^1(\mathsf{a}^2)),\mathsf{g}^1(\mathsf{a}^2))).\end{aligned}$$

En appliquant les règles de sélection adéquates, on obtient une dérivation $\mathsf{bo}(1)$

$$\begin{aligned}&\mathsf{h}(E(E(\mathsf{g}^1(\mathsf{a}^2),\mathsf{g}^1(\mathsf{a}^2)),\mathsf{g}^1(\mathsf{a}^2)),E(E(\mathsf{g}^1(\mathsf{a}^2),\mathsf{g}^1(\mathsf{a}^2)),\mathsf{g}^1(\mathsf{a}^2)))\\ &\circ\!\!\to^*_{\mathcal{E}} \mathsf{h}(E(\mathsf{g}^1(\mathsf{a}^2),\mathsf{g}^1(\mathsf{a}^2)),\mathsf{g}^1(\mathsf{a}^2)).\end{aligned}$$

Il suffit ensuite d'utiliser les règles de ${\mathcal{A}_\mathcal{P}}^{\mathbb{N}}$ *pour finir de construire la dérivation vers* $\overline{t}$

$$\mathsf{h}(E(\mathsf{g}^1(\mathsf{a}^2),\mathsf{g}^1(\mathsf{a}^2)),\mathsf{g}^1(\mathsf{a}^2)) \to^3_{{\mathcal{A}_\mathcal{P}}^{\mathbb{N}}} \overline{t} = \mathsf{h}(E(\mathsf{g}^1(\{q_f\}),\mathsf{g}^1(\{q_f\})),\mathsf{g}^1(\{q_f\})).$$

5.3.11 Lemme de simulation

Le lemme de simulation est obtenu en appliquant plusieurs fois les lemmes de projection 5.47 et de relèvement 5.51. Rappelons que $\mathcal{A} = (\mathcal{F}, \mathcal{Q}, \mathcal{Q}_f, \Gamma)$ désigne un automate complet déterministe reconnaissant un langage L.

Lemme 5.53. *Pour tout termes $s \in \mathcal{T}$, et tout état $q \in \mathcal{Q}$ tels que $s \to^*_{\mathcal{A}^+_\mathcal{P}} q$,*

$$\begin{gathered} s \ {}_{\mathsf{bo}(k)}\!\circ\!\!\to^*_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}} \to^*_{{\mathcal{A}^+_\mathcal{P}}^{\mathbb{N}}} \{q\} \\ \Leftrightarrow \\ s \to^*_{\mathcal{G}} \{q\} \end{gathered}$$

Démonstration. Soit $s \in \mathcal{T}$.

— Supposons que $s \ {}_{\mathsf{bo}(k)}\!\circ\!\!\to^*_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}} \overline{t} \to_{{\mathcal{A}^+_\mathcal{P}}^{\mathbb{N}}} \{q\}$. D'après le lemme 5.18 page 124, il existe un terme $\overline{t'} \in \overline{\mathcal{T}}$ tel que

$$\overline{t} \ {}_{\mathsf{bo}(k)}\!\circ\!\!\to^*_{\mathcal{E}} \overline{t'} \to_{\mathcal{A}^{\mathbb{N}}} q.$$

En appliquant le lemme de projection 5.47 page 143 à chaque pas de la dérivation $s \ {}_{\mathsf{bo}(k)}\!\circ\!\!\to^*_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}} \overline{t'}$, nous obtenons une dérivation

$$s = \mathsf{Top}_k(s) \to^*_{\mathcal{G}} \mathsf{Top}_k(\overline{t}) \to^*_{\mathcal{G}} q.$$

Par définition de Top,

$$\overline{t} \to^*_{\mathcal{A}^{\mathbb{N}}_\mathcal{P}} \mathsf{Top}_k(\overline{t}).$$

Comme $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}_\mathcal{P}$ est confluent, et comme t ne contient pas de symbole E, $\mathsf{Top}_k(\overline{t}) \in \overline{\mathcal{T}}(E \cup \mathcal{Q}_\mathcal{P})^{\leq k}$ (lemme 5.22) et,

$$\mathsf{Top}_k(\overline{t}) \to^*_{\mathcal{A}^{\leq k}_\mathcal{P}} \{q\}.$$

Les règles de $\mathcal{A}^{\leq k}_\mathcal{P}$ étant aussi des règles de $\mathcal{G}$, nous avons une dérivation

$$s \to^*_{\mathcal{G}} \{q\}.$$

— Réciproquement Soit $s \to^*_{\mathcal{G}} \{q\}$. Montrons que $s \;_{\mathsf{bo}(k)}\!\circ\!\!\to^*_{\mathcal{R}} \to^*_{\mathcal{A}^{+\mathbb{N}}_{\mathcal{P}}} q$. Comme $\mathcal{G}$ est l'union de $\mathcal{A}^{+\le k}_{\mathcal{P}}$ et de tous les automates $\mathcal{G}(\bar{l}, r, \overline{\tau})$, Il existe une dérivation

$$s \to^*_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}{}^{\le k}} \to_{\mathcal{G}(\overline{l_0}, r_0, \overline{\tau_0}, k)} \overline{s_1} \to^*_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}{}^{\le k}} \to_{\mathcal{G}(\overline{l_1}, r_1, \overline{\tau_1}, k)} \overline{s_2}$$
$$\ldots \to^*_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}{}^{\le k}} \to_{\mathcal{G}(\overline{l_{n-1}}, r_{n-1}, \overline{\tau_{n-1}})} \overline{s_n} \to^*_{\mathcal{A}^{\le k}_{\mathcal{P}}} \{q\},$$

Si $n = 0$ alors

$$s \to^*_{\mathcal{A}^{+}_{\mathcal{P}}} \{q\},$$

et le résultat est vérifié.
Soit $n > 0$. D'après le lemme de relèvement 5.51 page 147 appliqué à

$$s \to^*_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}{}^{\le k}} \to_{\mathcal{G}(\overline{l_0}, r_0, \overline{\tau_0})} \overline{s_1},$$

il existe un terme $\overline{s'_1} \in \overline{\mathcal{T}}_E$ tel quel

$$s \;_{\mathsf{bo}(k)}\!\circ\!\!\to^*_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}} \overline{s'_1} \to^*_{\mathcal{A}^{+\mathbb{N}}_{\mathcal{P}}} \overline{s_1}.$$

Nous pouvons appliquer à nouveau ce lemme à la dérivation

$$\overline{s'_1} \to_{\mathcal{A}^{+\mathbb{N}}_{\mathcal{P}}} \overline{s_1} \to^*_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}{}^{\le k}} \to_{\mathcal{G}(\overline{l_1}, r_1, \overline{\tau_1})} \overline{s_2}.$$

Nous obtenons un terme $\overline{s'_2}$ tel que

$$\overline{s'_1} \;_{\mathsf{bo}(k)}\!\circ\!\!\to^*_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}} \overline{s'_2} \to^*_{\mathcal{A}^{+\mathbb{N}}_{\mathcal{P}}} \overline{s_2}.$$

En répétant ce procédé, nous obtenons un terme $\overline{s'_n}$ et une dérivation

$$s \;_{\mathsf{bo}(k)}\!\circ\!\!\to^*_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}} \overline{s'_1} \;_{\mathsf{bo}(k)}\!\circ\!\!\to^*_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}} \overline{s'_2} \ldots \;_{\mathsf{bo}(k)}\!\circ\!\!\to^*_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}} \overline{s'_n} \to^*_{\mathcal{A}^{+\mathbb{N}}_{\mathcal{P}}} \{q\}.$$

$\square$

Corollaire 5.54. *Dans ce corollaire, $\mathcal{A}$ est l'automate qui accepte tous les termes et qui est constitué d'un état $q \in \mathcal{Q} = \mathcal{Q}_f$, et des règles $\Gamma = \{f(q, \ldots, q) \to q \mid f \in \mathcal{F}\}$. Pour tout terme $s \in \mathcal{T}$, $\bar{t} \in \overline{\mathcal{T}}_E$,*

$$\exists \overline{t'}, s \;_{\mathsf{bo}(k)}\!\circ\!\!\to^*_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}} \overline{t'} \text{ et } \overline{t'} \to^*_{\mathcal{A}^{\mathbb{N}}_{\mathcal{P}}} \mathsf{Top}_k(\bar{t})$$
$$\Leftrightarrow$$
$$s \to^*_{\mathcal{G}} \mathsf{Top}_k(\bar{t}).$$

Démonstration. Si $s \;_{\mathsf{bo}(k)}\!\circ\!\!\to^*_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}} \overline{t'}$ et $\overline{t'} \to^*_{\mathcal{A}^{\mathbb{N}}_{\mathcal{P}}} \mathsf{Top}_k(\bar{t})$, alors nous avons vu dans la preuve du lemme précédent 5.53 que $s \to^*_{\mathcal{G}} \mathsf{Top}_k(\overline{t'})$. De plus, pour toute position $u \in \mathsf{Topd}_k(t')$, $\mathsf{m}(\bar{t}/u) \le \mathsf{m}(\overline{t'}/u)$. Ainsi, $\mathsf{Topd}_k(\overline{t'}) \subseteq \mathsf{Topd}_k(\bar{t})$. Les automates $\mathcal{A}^{+}_{\mathcal{P}}$ et $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ sont identiques puisque $\mathcal{A}$ ne contient qu'un seul état. Nous avons donc $\mathsf{Top}_k(\overline{t'}) \to^*_{\mathcal{A}^{\le k}_{\mathcal{P}}} \mathsf{Top}_k(\bar{t})$, et comme les règles de $\mathcal{A}^{\le k}_{\mathcal{P}}$ sont des règles de $\mathcal{G}$ le résultat est vérifié.
Réciproquement, nous avons vu dans la même preuve que si $s \to^*_{\mathcal{G}} \mathsf{Top}_k(\bar{t})$, alors il existe un terme $\overline{t'}$ tel que

$$s \;_{\mathsf{bo}(k)}\!\circ\!\!\to^*_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}} \overline{t'} \to^*_{\mathcal{A}^{+\mathbb{N}}_{\mathcal{P}}} \mathsf{Top}_k(\bar{t}).$$

Notre automate $\mathcal{A}$ ne contient qu'un état. L'automate $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ et l'automate $\mathcal{A}^{+}_{\mathcal{P}}$ sont donc identiques, et le résultat est vérifié. $\square$

Lemme 5.55 (Lemme de simulation)**.** *Nous avons*

$$(\rightarrow_{\mathcal{G}}^{*})[\mathcal{Q}_{f,\mathcal{P}}] \cap \mathcal{T} = ({}_{\mathsf{bo}(k)}{\rightarrow}_{\mathcal{R}}^{*})[\mathsf{L}].$$

Démonstration. D'après le lemme 5.53, $s \in (\rightarrow_{\mathcal{G}}^{*})[\mathcal{Q}_{f,\mathcal{P}}] \cap \mathcal{T}$ si et seulement s'il existe $q \in \mathcal{Q}_f$ et $\bar{t} \in \mathcal{T}(\mathcal{F}^{\mathsf{N}} \cup \mathcal{Q})$ tels que

$$s \ {}_{\mathsf{bo}(k)}{\circ\!\!\rightarrow}_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}}^{*} \ \bar{t} \rightarrow_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{+\mathsf{N}}}^{*} \{q\}$$

D'après le lemme 5.18 page 124, $\bar{t} \rightarrow_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{+\mathsf{N}}}^{*} \{q\}$ si et seulement s'il existe un terme $\overline{t'} \in \overline{\mathcal{T}}$ tel quel

$$\bar{t} \ {}_{\mathsf{bo}(k)}{\circ\!\!\rightarrow}_{\mathcal{E}}^{*} \ \overline{t'} \rightarrow_{\mathcal{A}^{\mathbb{N}}}^{*} q.$$

Or $\overline{t'} \rightarrow_{\mathcal{A}^{\mathbb{N}}}^{*} q$ si et seulement si $t' \rightarrow_{\mathcal{A}}^{*} q$ si et seulement si $t' \in \mathsf{L}$. Nous avons donc

$$s \ {}_{\mathsf{bo}(k)}{\rightarrow}_{\mathcal{R}}^{*} \ [\mathsf{L}] \Leftrightarrow s \rightarrow_{\mathcal{G}}^{*} [\mathcal{Q}_f]$$

□

5.4 Inverse-préservation de la reconnaissabilité pour la stratégie k-bornée

Ce résultat découle directement de la i-préservation de la reconnaissabilité pour les TTC, et du lemme de simulation.

Proposition 5.56. *La stratégie* $\mathsf{bo}(k)$ *i-préserve la reconnaissabilité.*

Démonstration. Soit T un langage reconnu par un automate déterministe $\mathcal{A}$ et $\mathcal{R}$ un *SRT* linéaire à gauche. Pour montrer que la stratégie $\mathsf{bo}(k)$ i-préserve la reconnaissabilité, il suffit de montrer que nous pouvons construire un automate qui reconnaît $({}_{\mathsf{bo}(k)}{\rightarrow}_{\mathcal{R}}^{*})[T]$. D'après le lemme de simulation 5.55, nous pouvons construire un TTC $\mathcal{G}$ tel que

$$(\rightarrow_{\mathcal{G}}^{*})[\mathcal{Q}_{f,\mathcal{P}}] \cap \mathcal{T} = ({}_{\mathsf{bo}(k)}{\rightarrow}_{\mathcal{R}}^{*})[T].$$

Comme $\mathcal{G}$ est un TTC il i-préserve la reconnaissabilité et l'ensemble $(\rightarrow_{\mathcal{G}}^{*})[\mathcal{Q}_{f,\mathcal{P}}]$ est reconnaissable. Comme l'intersection de deux ensembles reconnaissables est reconnaissable et peut être construite, nous pouvons fabriquer un automate qui reconnaît $({}_{\mathsf{bo}(k)}{\rightarrow}_{\mathcal{R}}^{*})[T] = (\rightarrow_{\mathcal{G}}^{*})[\mathcal{Q}_{f,\mathcal{P}}] \cap \mathcal{T}(\mathcal{F})$. □

Corollaire 5.57. *Tout système* $\mathcal{R} \in \mathsf{BO}(k)$ *i-préserve la reconnaissabilité.*

Démonstration. Soit T un langage reconnu par un automate déterministe $\mathcal{A}$ et $\mathcal{R} \in \mathsf{BO}(k)$. D'après la proposition 5.56, l'ensemble $({}_{\mathsf{bo}(k)}{\rightarrow}_{\mathcal{R}}^{*})[T]$ est reconnaissable. Comme $\mathcal{R} \in \mathsf{BO}(k)$, $({}_{\mathsf{bo}(k)}{\rightarrow}_{\mathcal{R}}^{*})[T] = (\rightarrow_{\mathcal{R}}^{*})[T]$. L'ensemble $(\rightarrow_{\mathcal{R}}^{*})[T]$ est donc reconnaissable. □

5.5 Les SRTs linéaires à gauche fortement k-bornés

5.5.1 Présentation du chapitre

Dans ce chapitre, nous allons introduire la notion de dérivation **k-bornée et bo(k)** (bhbo(k)). Une dérivation est bhbo(k) si elle est k-bornée et bh (sans tenir compte des règles de E). La stratégie bh n'est pas restrictive, et toute dérivation peut être transformée en dérivation bh. Pour vérifier qu'une dérivation dans $\mathcal{R} \cup \mathcal{E}$ est bh il faut, comme dans le cas linéaire, vérifier que lorsqu'une règle de $\mathcal{R}$ est appliquée, la marque à la racine est 0.

Conformément à nos notations, un système linéaire à gauche $\mathcal{R}$ sera dit **fortement k-borné** (FBO(k)) si toute dérivation bh est k-bornée. La classe FBO est définie comme l'union de toutes les classes FBO(k). Comme la bh n'est pas restrictive (proposition 5.62 page 153), la classe FBO(k) est une sous-classe de BO(k).

Nous finirons ensuite comme dans le cas linéaire par définir un critère de non-appartenance qui nous permettra de montrer que le problème de l'appartenance est décidable à LFBO(k) est décidable (5.72 page 160), en nous appuyant à nouveau sur la simulation de $(\mathcal{R} \cup \mathcal{E})^{\#}$. Nous finirons en donnant la preuve que la stratégie bh n'est pas restrictive, et nous nous servirons de cette preuve pour démontrer que les systèmes growing linéaires à gauche i-préservent la reconnaissabilité.

5.5.2 Dérivations de bas en haut

Nous allons maintenant étendre la notion de dérivation bh à la classe des systèmes linéaires. À notre connaissance, c'est la première tentative pour étendre la notion de dérivation bh (déjà plus ou moins abordée sous une forme où une autre dans le cas de systèmes de réécriture de mots, ou de systèmes linéaires) à la classe des systèmes linéaires à gauche.

Définition 5.58 (dérivation de bas en haut)**.** *Un pas de réécriture marqué*

$$\overline{s} \rightarrow_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E},l\rightarrow r,\bar{l},v} \bar{t}$$

est un pas bh *si $l \rightarrow r \in \mathcal{E}$, ou si $l \rightarrow r \in \mathcal{R}$ et si les conditions suivantes sont remplies*

$$l \notin \mathcal{V} \Rightarrow \mathsf{m}(\overline{l_i}) = 0$$
$$l \in \mathcal{V} \Rightarrow \forall u \prec v_{n-1}, \mathsf{m}(\overline{s_i}/u) = 0.$$

Une dérivation marquée dans $\overline{s} \circ\!\!\rightarrow^*_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}} \bar{t}$ est une **dérivation de bas en haut** *(noté* bh*) si tous les pas sont* bh*.*
Une dérivation dans $\mathcal{R} \cup \mathcal{E}$ est bh *si la dérivation marquée associée est* bh*.*

À nouveau, comme dans le cas des dérivations bo(k), nous voyons que tout pas de réécriture marqué effectué dans $\mathcal{E}$ est bh. La condition que doit remplir la dérivation marquée pour être bh est la même que dans le cas linéaire si la dérivation ne comporte aucun pas dans $\mathcal{E}$ (voir définition 3.18 page 40). Il s'agit donc bien d'une extension de la définition de stratégie bh du cas linéaire au cas linéaire à gauche. Notez aussi que tout pas de réécriture bh tel que $l \in \mathcal{V} \cup \mathcal{F}_0$ est bo(0), et que tout pas de réécriture bo(0) est bh.

Notation :
Nous noterons $\bar{s} \;_{\mathsf{bh}}{\circ\!\!\to}^*_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}} \; \bar{t}$ une dérivation marquée bh, et $s \;_{\mathsf{bh}}{\to}^*_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}} \; t$ une dérivation bh.

Exemple 5.59. *Reprenons les dérivations de l'exemple 5.6. La dérivation* $\overline{d_1}$ *est* $\mathsf{bo}(1)$ *puisque la marque* 1 *apparaît dans le membre gauche d'une règle de* $\mathcal{R}$

$$\begin{aligned}\overline{d_1} : \mathsf{i}(\mathsf{a}) &\circ\!\!\to_{x\to E(x,x),\epsilon} E(\mathsf{i}(\mathsf{a}^1),\mathsf{i}(\mathsf{a}^1)) \circ\!\!\to_{x\to E(x,x),0} E(E(\mathsf{i}(\mathsf{a}^1),\mathsf{i}(\mathsf{a}^1)),\mathsf{i}(\mathsf{a}^1))\\ &\circ\!\!\to_{\mathsf{a}\to\mathsf{b}} E(E(\mathsf{i}(\mathsf{a}^1),\mathsf{i}(\mathsf{b})),\mathsf{i}(\mathsf{a}^1)) \circ\!\!\to_{\mathsf{a}\to\mathsf{c}} \ldots\end{aligned}$$

Elle n'est pas bh *puisque la marque apparaissant à la racine de la règle* $\mathsf{a}\to\mathsf{b}$ *lors du troisième pas est* 1. *La dérivation*

$$\begin{aligned}\overline{d_1'} : \mathsf{i}(\mathsf{a}) &\circ\!\!\to_{x\to E(x,x),0} \mathsf{i}(E(\mathsf{a},\mathsf{a})) \circ\!\!\to_{x\to E(x,x),0} \mathsf{i}(E(E(\mathsf{a},\mathsf{a}),\mathsf{a}))\\ &\circ\!\!\to_{\mathsf{a}\to\mathsf{b},001} \mathsf{i}(E(E(\mathsf{a},\mathsf{b}),\mathsf{a})) \circ\!\!\to_{\mathsf{a}\to\mathsf{c},02} \mathsf{i}(E(E(\mathsf{a},\mathsf{b})),\mathsf{c})\\ &\circ\!\!\to_{x\to\mathsf{h}(x,x)),00} \mathsf{i}(E(\mathsf{h}(E(\mathsf{a}^1,\mathsf{b}^1),E(\mathsf{a}^1,\mathsf{b}^1)),\mathsf{c}))\\ &\circ\!\!\to_{E(x,y)\to x,000} \mathsf{i}(E(\mathsf{h}(\mathsf{a}^1,E(\mathsf{a}^1,\mathsf{b}^1)),\mathsf{c}))\\ &\circ\!\!\to_{E(x,y)\to y,001} \mathsf{i}(E(\mathsf{h}(\mathsf{a}^1,\mathsf{b}^1),\mathsf{c}))\\ &\circ\!\!\to_{x\to\mathsf{h}(x,x),\epsilon} \mathsf{h}(\mathsf{i}^1(E(\mathsf{h}^2(\mathsf{a}^3,\mathsf{b}^3),\mathsf{c}^2)),\mathsf{i}^3(E(\mathsf{h}^2(\mathsf{a}^3,\mathsf{b}^3),\mathsf{c}^2)))\\ &\circ\!\!\to_{E(x,y)\to x,00} \mathsf{h}(\mathsf{i}^1(\mathsf{h}^2(\mathsf{a}^3,\mathsf{b}^3)),\mathsf{i}^3(E(\mathsf{h}^2(\mathsf{a}^3,\mathsf{b}^3),\mathsf{c}^2)))\\ &\circ\!\!\to_{E(x,y)\to y,11} \mathsf{h}(\mathsf{i}^1(\mathsf{h}^2(\mathsf{a}^3,\mathsf{b}^3)),\mathsf{c}^2).\end{aligned}$$

est elle bh. *On voit qu'il suffisait d'introduire le symbole E juste au-dessus de* a *au lieu de l'insérer au-dessus de* i *pour obtenir une dérivation* bh.

Définition 5.60 (Terme fortement marqué). *Un terme* $\bar{t} \in \overline{\mathcal{T}}_E(\mathcal{V})$ *est* **fortement marqué** *si pour toute position* $v \in \mathcal{P}\mathsf{os}_{\mathcal{F}}(\bar{t})$, *pour toute position* $u \preceq v$,

$$\mathsf{m}(\bar{t}/v) = 0 \Rightarrow \mathsf{m}(\bar{t}/u) = 0.$$

Une dérivation marquée est fortement marquée si tout ses termes sont fortement marqués.

Proposition 5.61. *Toute dérivation* bh *commençant par un terme fortement marqué est fortement marquée. Par conséquent, toute dérivation marquée associée à une dérivation* bh *est fortement marquée.*

5.5.3 Toute dérivation est transformable en dérivation bas en haut

La prochaine proposition montre que comme dans le cas linéaire, la stratégie bh n'est pas restrictive : toute dérivation peut être remplacée par une dérivation de bas en haut.

Proposition 5.62. *Pour tous* $s, t \in \mathcal{T}$, $s \to^*_{\mathcal{R}} t$ *si et seulement s'il existe une dérivation* bh $s \to^*_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}} t$.

Démonstration. S'il existe une dérivation $s \;_{\mathsf{bh}}{\to}^*_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}} \; t$, alors d'après la proposition 5.14 page 121, il existe une dérivation $s \to^*_{\mathcal{R}} t$.
Démontrerons la réciproque par récurrence sur n la longueur de la dérivation

$s \rightarrow^n_{\mathcal{R}} t$. Si $n = 0$, le résultat est vérifié. Soit $n > 0$. Par hypothèse de récurrence, il existe une dérivation bh

$$d: \ s = \overline{s_0} \ _{\mathsf{bh}}\!\circ\!\!\longrightarrow_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}, l_0 \to r_0, v_0} \overline{s_1} \\ \cdots \ _{\mathsf{bh}}\!\circ\!\!\longrightarrow_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}, l_{n-1} \to r_{n-1}, v_{n-1}} \overline{s_{n-1}} = \overline{s_{n-1}}[\overline{l_{n-1}}\overline{\sigma_{n-1}}]_{v_{n-1}}.$$

Et nous avons un pas

$$\overline{s_{n-1}}[\overline{l_{n-1}}\overline{\sigma_{n-1}}]_{v_{n-1}} \ \circ\!\!\longrightarrow \overline{s_n}[r_{n-1}(\overline{\sigma_{n-1}} \odot a)]_{v_{n-1}} = \bar{t}.$$

Si $l_{n-1} \to r_{n-1} \in \mathcal{E}$, ce pas est bh et le résultat est vérifié.
Sinon $l_{n-1} \to r_{n-1} \in \mathcal{R}$ et $a = 1$. Nous allons réorganiser la dérivation et appliquer le pas $l_{n-1} \to r_{n-1}$ au moment voulu.
Notation : Dans la suite, nous noterons org^i la position $\mathsf{org}^i_{n-1}(v_{n-1})$.
Soit

$$\mathsf{o} = \min\{i \mid j \in \{0, \ldots n-1\}, \mathsf{org}^i \text{ est défini et } \mathsf{m}(\overline{s_{n-i}}/\mathsf{org}^i) = 0\}.$$

- fait 1 : L'entier o est bien défini.
Soit j le plus grand entier tel que org^j est bien défini

$$j = \max\{i \mid \mathsf{org}^i) \text{ est défini}\}$$

Montrons que $\mathsf{m}(\overline{s_{n-1-j}}/\mathsf{org}^j) = 0$ pour montrer que o est bien défini. Si $j = n-1$, alors comme $s = \overline{s_0}$ n'est marqué que par des 0, o est bien défini. Sinon, $0 \leq j < n-1$. Nous distinguons trois cas.

— $\boldsymbol{\mathsf{org}^j \perp v_{n-2-j}}$ **ou** $\boldsymbol{\mathsf{org}^j \prec v_{n-2-j}}$**.**
Ce cas n'est pas possible car il contredit le fait que j est maximum : $\mathsf{org}^{j+1} = \mathsf{org}^j$ serait défini.

— $\boldsymbol{\mathsf{org}^j \succeq v_{n-2-j}}$ **et** $\boldsymbol{\exists w \in \mathcal{P}\mathsf{os}_{\setminus\mathcal{V}}(r_{n-2-j})}$ **tel que** $\boldsymbol{\mathsf{org}^j = v_{n-2-j} \cdot w}$**.**
Dans ce cas

$$\overline{s_{n-1-j}} = \overline{s_{n-2-j}}[r_{n-2-j}(\overline{\sigma_{n-2-j}} \odot a)]_{v_{n-2-j}}, \mathsf{m}(\overline{s_{n-1-j}}/\mathsf{org}^j) = 0,$$

et o est bien défini.

— $\boldsymbol{\mathsf{org}^j \succeq v_{n-2-j}}$ **et** $\boldsymbol{\exists x \in \mathcal{V}\mathsf{ar}(r_{n-2-j}), w_1 \in \mathcal{P}\mathsf{os}_{\mathcal{V}}(r_{n-2-j}, x), w_2 \in \mathcal{P}\mathsf{os}(x\sigma_{n-2-j})}$ **tels que** $\boldsymbol{\mathsf{org}^j = v_{n-2-j} \cdot w_1 \cdot w_2}$**.**
Dans ce cas, org^{j+1} est défini et cela contredit le fait que j est un maximum.

L'entier o est donc bien défini. Avant de démontrer de nouveaux faits et de finir la preuve, remarquons que dans le cas ou $\mathsf{o} = 0$ le lemme est facilement démontrable. En effet, si $\mathsf{o} = 0$, alors par définition de o,

$$\overline{s_{n-1}} = \overline{s_{n-1}}[\overline{l_{n-1}}\overline{\sigma_{n-1}}]_{v_{n-1}},$$

et comme $\mathsf{m}(\overline{s_{n-1}}/v_{n-1}) = 0$, d'après la proposition 5.61 page 153, pour toute position $u \preceq v_{n-1}$, $\mathsf{m}(\overline{s_{n-1}}/u) = 0$, et cela nous assure que le pas

$$\overline{s_{n-1}}[\overline{l_{n-1}}\overline{\sigma_{n-1}}]_{v_{n-1}} \ _{\mathsf{bh}}\!\circ\!\!\longrightarrow \overline{s_n}[r_{n-1}(\overline{\sigma_{n-1}} \odot a)]_{v_{n-1}},$$

est bh et nous obtenons le résultat voulu.
Nous supposerons donc dorénavant dans cette preuve que $\mathsf{o} > 0$.

- fait 2 : $\overline{s_{n-1-\mathsf{o}}}/\mathsf{org}^{\mathsf{o}} \odot 0 \circ\!\!\rightarrow^*_{\mathcal{E}} \widetilde{l_{n-1}}\widetilde{\sigma_{n-1}}$ et $\mathsf{m}(\widetilde{l_{n-1}\sigma_{n-1}}) = 0$.
Par définition de o pour tout $0 \le i < \mathsf{o}$, $\mathsf{m}(s_{n-1-i}/\mathsf{org}^i) > 0$. De plus d'après la proposition 5.61, pour tout $u \succeq \mathsf{org}^i, \mathsf{m}(\overline{s_{n-1-i}}/u) > 0$. Ainsi, comme la dérivation est bh, aucune règle de $\mathcal{R}$ ne peuvent être appliquée sous la position org^i dans la dérivation $\overline{s_{n-1-\mathsf{o}}} \rightarrow^* \overline{s_{n-1}}$. Plus formellement,

$$\forall i < \mathsf{o}, v_{n-1-i} \succeq \mathsf{org}^i \Rightarrow l_{n-1-i} \rightarrow r_{n-1-i} \in \mathcal{E}. \tag{5.10}$$

Comme tous les pas dans $\mathcal{E}$ sont bh il existe une dérivation

$$\overline{s_{n-1-\mathsf{o}}}/\mathsf{org}^{\mathsf{o}} \odot 0 \circ\!\!\rightarrow^*_{\mathcal{E}} \widetilde{l_{n-1}\sigma_{n-1}}.$$

Les pas dans $\mathcal{E}$ et l'opération $\odot 0$ ne changeant pas les marques à la racine, nous avons

$$\mathsf{m}(\widetilde{l_{n-1}\sigma_{n-1}}) = \mathsf{m}(\overline{s_{n-1-\mathsf{o}}}/\mathsf{org}^{\mathsf{o}} \odot 0) = 0.$$

- fait 3 : $\overline{s_{n-1-\mathsf{o}}}\ {}_{\mathsf{bh}}\!\circ\!\!\rightarrow^*_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}} \overline{s_{n-1-\mathsf{o}}}[E(\overline{s_{n-1-\mathsf{o}}} \odot 0, r_{n-1}(\widetilde{\sigma_{n-1}} \odot 1))]_{\mathsf{org}^{\mathsf{o}}}$.
Clairement,

$$\overline{s_{n-1-\mathsf{o}}}\ {}_{\mathsf{bh}}\!\circ\!\!\rightarrow_{x\rightarrow E(x,x)} \overline{s_{n-1-\mathsf{o}}}[E(\overline{s_{n-1-\mathsf{o}}}/\mathsf{org}^{\mathsf{o}} \odot 0, \overline{s_{n-1-\mathsf{o}}}/\mathsf{org}^{\mathsf{o}} \odot 0)]_{\mathsf{org}^{\mathsf{o}}}.$$

Le fait 2 nous permet de construire une dérivation

$$\overline{s_{n-1-\mathsf{o}}}[E(\overline{s_{n-1-\mathsf{o}}}/\mathsf{org}^{\mathsf{o}}\odot 0, \overline{s_{n-1-\mathsf{o}}}/\mathsf{org}^{\mathsf{o}}\odot 0)]_{\mathsf{org}^{\mathsf{o}}} \circ\!\!\rightarrow^*_{\mathcal{E}} \overline{s_{n-1-\mathsf{o}}}[E(\overline{s_{n-1-\mathsf{o}}}/\mathsf{org}^{\mathsf{o}}\odot 0, \widetilde{l_{n-1}}\widetilde{\sigma_{n-1}}\odot 0)]_{\mathsf{org}^{\mathsf{o}}}.$$

Le fait 2 nous assure que

$$\mathsf{m}(\widetilde{l_{n-1}}) = \mathsf{m}(\overline{s_{n-1-\mathsf{o}}}/\mathsf{org}^{\mathsf{o}} \odot 0) = 0.$$

D'après le lemme 5.61, pour toute position $u \preceq \mathsf{org}^{\mathsf{o}}$, $\mathsf{m}(\overline{s_{n-1-\mathsf{o}}}/u) = 0$. Cela, nous assure qu'il y a un pas bh (quel que soit le cas $l \in \mathcal{V}$ ou $l \notin \mathcal{V}$)

$$\overline{s_{n-1-\mathsf{o}}}[E(\overline{s_{n-1-\mathsf{o}}}/\mathsf{org}^{\mathsf{o}}\odot 0, \widetilde{l_{n-1}}\widetilde{\sigma_{n-1}})]_{\mathsf{org}^{\mathsf{o}}}\ {}_{\mathsf{bh}}\!\circ\!\!\rightarrow_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}} \overline{s_{n-1-\mathsf{o}}}[E(\overline{s_{n-1-\mathsf{o}}}/\mathsf{org}^{\mathsf{o}}\odot 0, r_{n-1}(\widetilde{\sigma_{n-1}}\odot 1))]_{\mathsf{org}^{\mathsf{o}}}.$$

- fait 4 : Pour tout $0 < i \le \mathsf{o}$, pour tout marquage $r_{n-1}\widetilde{\sigma_{n-1}}$ de $r_{n-1}\sigma_{n-1}$ il existe une dérivation bh

$$\begin{aligned}&\overline{s_{n-1-i}}[E(\overline{s_{n-1-i}}/\mathsf{org}^i \odot 0, r_{n-1}\widetilde{\sigma_{n-1}})]_{\mathsf{org}^i}\\ &{}_{\mathsf{bh}}\!\circ\!\!\rightarrow^* \overline{s_{n-i}}[E(\overline{s_{n-i}}/\mathsf{org}^{i-1} \odot 0, r_{n-1}\widetilde{\sigma_{n-1}})]_{\mathsf{org}^{i-1}}.\end{aligned}$$

Soit $i \in \{0, \ldots, \mathsf{o}\}$. Nous distinguons différents cas.
- $v_{n-1-i} \perp \mathsf{org}^i$.
Nous avons $\mathsf{org}^{i-1} = \mathsf{org}^i$ et $\overline{s_{n-1-i}}/\mathsf{org}^i \odot 0 = \overline{s_{n-i}}/\mathsf{org}^{i-1} \odot 0$. Nous pouvons appliquer la règle $l_{n-1-i} \rightarrow r_{n-1-1}$ sur le terme $\overline{s_{n-1-i}}[E(\overline{s_{n-1-i}}/\mathsf{org}^i \odot 0, r_{n-1}\widetilde{\sigma_{n-1}})]_{\mathsf{org}^i}$ à la position v_{n-1-i} et obtenir la dérivation bh souhaitée vers le terme $\overline{s_{n-i}}[E(\overline{s_{n-i}}/\mathsf{org}^{i-1} \odot 0, r_{n-1}\widetilde{\sigma_{n-1}})]_{\mathsf{org}^{i-1}}$.
- $v_{n-1-i} \succ \mathsf{org}^i$.
Par définition de o, nous ne pouvons avoir $i = \mathsf{o}$.
Il existe w tel que $v_{n-1-i} = \mathsf{org}^i \cdot w$. Par définition de o, $\mathsf{m}(\overline{t_{n-1-i}}/\mathsf{org}^i) > 0$, et

d'après le lemme 5.61, $\mathsf{m}(\overline{t_{n-1-i}}/v_{n-1-i}) = \mathsf{m}(\overline{l_{n-1-i}}) > 0$. Comme le pas est bh, nous avons nécessairement $l_{n-i-1} \to r_{n-i-1} \in \mathcal{E}$ et

$$\begin{aligned}&\overline{s_{n-1-i}}[E((\overline{s_{n-1-i}}/\mathsf{org}^i)[l_{n-1-i}\overline{\sigma_{n-1-i}}]_w \odot 0, r_{n-1}\widetilde{\sigma_{n-1}})]_{\mathsf{org}^i}\\ &\circ\!\!\to_{\mathcal{E}} \overline{s_{n-i-1}}[E((\overline{s_{n-i-1}}/\mathsf{org}^i)[r_{n-i-1}(\overline{\sigma_{n-i-1}} \odot 0)]_w \odot 0, r_{n-1}\widetilde{\sigma_{n-1}})]_{\mathsf{org}^i}\\ &= \overline{s_{n-i}}[E(\overline{s_{n-i}}/\mathsf{org}^{i-1} \odot 0, r_{n-1}\widetilde{\sigma_{n-1}})]_{\mathsf{org}^{i-1}}.\end{aligned}$$

-$v_{n-1-i} \preceq \mathsf{org}^i$ et $\exists w \in \mathcal{P}\mathsf{os}_{\setminus\mathcal{V}}(l_{n-1-i})$ tels que $\mathsf{org}^i = v_{n-1-i} \cdot w$.
Ce cas n'est pas possible org^i ne serait pas défini.
-$v_{n-1-i} \preceq \mathsf{org}^i$ et $\exists x \in \mathcal{V}\mathsf{ar}(l_{n-1-i}), w \in \mathcal{P}\mathsf{os}(x\sigma_{n-1-i})$ tels que $\mathsf{org}^i = v_{n-1-i} \cdot \mathsf{pos}(l_{n-1-i,x}) \cdot w$.
Dans ce cas, nous avons

$$\overline{s_{n-i-1}}[E(\overline{s_{n-i-1}}/\mathsf{org}^i \odot 0, r_{n-1}\widetilde{\sigma_{n-1}})]_{\mathsf{org}^{i+1}} = \overline{s_{n-1-i}}[\overline{l_{n-1-i}\tau}]_{v_{n-1-i}}$$

où

$$x\overline{\tau} = x\overline{\sigma_{n-1-i}}[E(\overline{s_{n-1-i}}/\mathsf{org}^i \odot 0, r_{n-1}\widetilde{\sigma_{n-1}})]_w$$

et

$$\forall y \neq x, y\overline{\tau} = y\overline{\sigma_{n-1-i}}.$$

Nous avons un pas bh :

$$\overline{s_{n-1-i}}[\overline{l_{n-1-i}\tau}]_{v_{n-1-i}} \;_{\mathsf{bh}}\!\circ\!\!\to \overline{s_{n-i-1}}[r_{n-1-i}(\overline{\tau} \odot a)]_{v_{n-1-i}},$$

avec $a = 1$ si $l_{n-1} \to r_{n-1} \in \mathcal{R}$ et 0 sinon. Nous avons

$$\begin{aligned}&\overline{s_{n-1-i}}[r_{n-1-i}(\overline{\tau} \odot a)]_{v_{n-1-i}} = \overline{s_{n-1-i}}[(r_{n-1-i}(\overline{\tau} \odot a))\\ &[x\overline{\sigma_{n-1-i}}[E(\overline{s_{n-1-i}}/\mathsf{org}^i \odot m, r_{n-1}\widetilde{\sigma_{n-1}} \odot m)]_w,\\ &\ldots, x\overline{\sigma_{n-1-i}}[E(\overline{s_{n-1-i}}/\mathsf{org}^i \odot m, r_{n-1}\widetilde{\sigma_{n-1}} \odot m)]_w]_{\mathcal{P}\mathsf{os}(r_{n-1-i},x)}]_{v_{n-1}}\end{aligned}$$

avec

$$m = \mathsf{Card}(\mathcal{P}\mathsf{os}^{\prec w}_{\setminus E}(x\sigma_{n-1-i})) + a.$$

Remarquons que par définition de $\mathsf{org}^{\mathsf{o}}$, nous avons $\mathsf{m}(\overline{s_{n-i}}/\mathsf{org}^{i-1}) > 0$ et d'après la proposition 5.61 page 153, il en est de même pour toute position lui succédant. Nous avons aussi

$$\overline{s_{n-i}}/\mathsf{org}^{i-1} = \overline{s_{n-i-1}}/\mathsf{org}^i \odot m,$$

et donc il y a une dérivation

$$x\overline{\tau} \odot a = x\overline{\sigma_{n-1-i}} \odot a[E(\overline{s_{n-1-i}}/\mathsf{org}^i \odot m, r_{n-1}\widetilde{\sigma_{n-1}} \odot m)]_w$$

$$_{\mathsf{bh}}\!\circ\!\!\to_{E(x,y)\to x} x\overline{\sigma_{n-1-i}} \odot a[\overline{s_{n-1-i}}/\mathsf{org}^i \odot m \odot 0]_w = x\overline{\sigma_{n-1-i}} \odot a.$$

Nous pouvons donc construire une dérivation

$$\begin{aligned}&\overline{s_{n-i-1}}[E(\overline{s_{n-i-1}} \odot 0/\mathsf{org}^i, r_{n-1}\widetilde{\sigma_{n-1}})]_{\mathsf{org}^i} \;_{\mathsf{bh}}\!\circ\!\!\to \overline{s_{n-1-1}}[r_{n-1-i}(\overline{\tau} \odot a)]_{v_{n-1-i}}\\ &_{\mathsf{bh}}\!\circ\!\!\to^*_{\mathcal{E}} \overline{s_{n-i}}[E(\overline{s_{n-i}}/\mathsf{org}^{i-1} \odot 0, r_{n-1}\widehat{\sigma_{n-1}})]_{\mathsf{org}^{i-1}}.\end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration du fait 4. Nous allons maintenant construire la dérivation voulue. Nous avons une dérivation

$$\overline{s} \;_{\mathsf{bh}}\!\circ\!\!\to^* \overline{s_{n-1-\mathsf{o}}}.$$

Le fait 3 nous permet de la prolonger

$$\overline{s_{n-1-\mathsf{o}}} \;_{\mathsf{bh}}\!\circ\!\!\longrightarrow^*_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}} \overline{s_{n-1-\mathsf{o}}}[E(\overline{s_{n-1-\mathsf{o}}} \odot 0, r_{n-1}(\widetilde{\widehat{\sigma_{n-1}}} \odot 1))]_{\mathsf{org}^{\mathsf{o}}}.$$

En utilisant plusieurs fois le fait 4 nous obtenons une dérivation

$$\begin{aligned}&\overline{s_{n-1-\mathsf{o}}}[E(\overline{s_{n-1-\mathsf{o}}} \odot 0, r_{n-1}(\widetilde{\widehat{\sigma_{n-1}}} \odot 1))]_{\mathsf{org}^{\mathsf{o}}}\\ &\;_{\mathsf{bh}}\!\circ\!\!\longrightarrow^*_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}} \overline{s_{n-1}}[E(\overline{s_{n-1}}/\mathsf{org}^0 \odot 0, \widehat{r_{n-1}\sigma_{n-1}})]_{\mathsf{org}^0}\end{aligned}$$

et cette dérivation se prolonge en utilisant une règle de sélection et en remarquant que $\mathsf{org}^0 = v_{n-1}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}&\overline{s_{n-1}}[E(\overline{s_{n-1}}/\mathsf{org}^0 \odot 0, \widehat{r_{n-1}\sigma_{n-1}})]_{\mathsf{org}^0}\\ &\;_{\mathsf{bh}}\!\circ\!\!\longrightarrow_{E(x,y)\to y, v_{n-1}} \widehat{s_n} = \overline{s_{n-1}}[\widehat{r_{n-1}\sigma_{n-1}} \odot 0]_{v_{n-1}}\end{aligned}$$

Nous avons donc une dérivation bh $\overline{s} \;_{\mathsf{bh}}\!\circ\!\!\longrightarrow^*_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}} \widehat{s_n}$, et le résultat est vérifié.

□

5.5.4 Dérivation fortement bien marquée pour k et bh

Définition 5.63 (dérivation linéaires à $\mathsf{bhbo}(k)$). *Une dérivation marquée dans $\mathcal{R}\cup\mathcal{E}$ est **k-bornée et bh** (noté $\mathsf{bhbo}(k)$) si elle à la fois* bh *et* $\mathsf{bo}(k)$. *Une dérivation dans $\mathcal{R}\cup\mathcal{E}$ est $\mathsf{bhbo}(k)$ si la dérivation marquée associée est $\mathsf{bhbo}(k)$.*

Notation : Nous noterons $\overline{s} \;_{\mathsf{bhbo}(k)}\!\circ\!\!\longrightarrow^*_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}} \overline{t}$ une dérivation marquée $\mathsf{bhbo}(k)$ et $s \;_{\mathsf{bhbo}(k)}\!\!\longrightarrow^*_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}} t$ une dérivation $\mathsf{bhbo}(k)$.

Définition 5.64 (Terme fortement bien marqué pour k). *Un terme est **fortement bien marqué pour k** s'il est fortement marqué et bien marquée pour k Une dérivation marquée est fortement bien marquée pour k si tout ses termes sont fortement bien marqués pour k.*

Proposition 5.65. *Toute dérivation commençant par un terme fortement bien marqué pour k et qui est $\mathsf{bhbo}(k)$ est fortement bien marquée pour k. Par conséquent, toute dérivation marquée associée à une dérivation $\mathsf{bhbo}(k)$) est fortement bien marquée pour k.*

5.5.5 Systèmes linéaires à gauche fortement k-bornés

Définition 5.66 (Systèmes $\mathsf{FBO}(k)$). *Un système est **fortement $\mathsf{FBO}(k)$** si pour tous termes $s, t \in \mathcal{T}$, toute dérivation* bh $s \;_{\mathsf{bh}}\!\!\longrightarrow^*_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}} t$ *est* $\mathsf{bo}(k)$. *Nous notons* FBO *l'union des classes* $\mathsf{FBO}(k)$

$$\mathsf{FBO} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathsf{FBO}(k).$$

Le prochain résultat est un corollaire de la proposition 5.62 page 153.

Corollaire 5.67. *Pour tout k, $\mathsf{FBO}(k) \subset \mathsf{BO}(k)$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{R}$ un système $\mathsf{FBO}(k)$. Soit $s \to^*_{\mathcal{R}} t$ une dérivation. D'après la proposition 5.62, Il existe une dérivation bh :

$$s \;_{\mathsf{bh}}\!\circ\!\!\longrightarrow^*_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}} \overline{t}.$$

Par définition de la classe $\mathsf{FBO}(k)$, cette dérivation est $\mathsf{bo}(k)$. Nous avons montrer que toute dérivation bh dans $\mathcal{R}$ est $\mathsf{bo}(k)$, le système $\mathcal{R} \in \mathsf{BO}(k)$. Pour conclure, il suffit de remarquer que le système de réécriture $\mathcal{R} = \{\mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) \to \mathsf{f}(x)\}$ est $\mathsf{bo}(0)$ et n'appartient pas à la classe FBO (exemple repris de [30]). $\square$

5.5.6 Décidabilité de l'appartenance pour la classe $\mathsf{FBO}(k)$

Pour montrer la décidabilité de ce problème, nous allons utiliser un critère proche de celui du critère pour les $\mathsf{LFBO}(k)$ (voir le critère 5.68 page 158). Dans ce qui suit, nous noterons d ce qui devrait être noté $\mathsf{d}(\mathcal{R}) = \max\{dpt(l) \mid l \in \mathsf{LHS}(\mathcal{R})\}$. Ce critère signifie qu'un système $\mathcal{R}$ n'appartient pas à $\mathsf{FBO}(k)$ si et seulement s'il existe une dérivation $\mathsf{bhbo}(k+\mathsf{d}-1)$ qui n'est pas $\mathsf{bhbo}(k)$.

Lemme 5.68 (Critère de non-appartenance à $\mathsf{FBO}(k)$)**.** *Le système $\mathcal{R}$ n'appartient pas à $\mathsf{FBO}(k)$ si et seulement s'il existe $s \in \mathcal{T}$, $\overline{t} \in \overline{\mathcal{T}}_E$, $v \in \mathcal{P}\mathsf{os}(t)$, $l \to r \in \mathcal{R}$, $\overline{l} \in \overline{\mathcal{T}}_E(\mathcal{V})\backslash\mathcal{V}$, et $\overline{\sigma} : \mathcal{V} \to \overline{\mathcal{T}}_E$ tels que*

1. $s \;{}_{\mathsf{bhbo}(k)}{\circ\!\!\longrightarrow}^*_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}}\; \overline{t}$,
2. $\overline{t} = \overline{t}[\overline{l}\overline{\sigma}]_v$,
3. $k < \mathsf{mmax}(\overline{l}) \leq k + \mathsf{d} - 1$,
4. $\mathsf{m}(\overline{l}) = 0$.

Démonstration. S'il existe $s \in \mathcal{T}$, $\overline{t} \in \overline{\mathcal{T}}_E$, $v \in \mathcal{P}\mathsf{os}(t)$, $l \to r \in \mathcal{R}$, et $\overline{\sigma}$ qui satisfont 1, 2, 3 et 4 alors il y a une dérivation $\mathsf{bhbo}(k+\mathsf{d}-1)$

$$s \;{}_{\mathsf{bhbo}(k)}{\circ\!\!\longrightarrow}^*_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}}\; \overline{t} = \overline{t}[\overline{l}\overline{\sigma}]_v \;{}_{\mathsf{bhbo}(k+\mathsf{d}-1)}{\circ\!\!\longrightarrow}\; \overline{t}[r(\overline{\sigma} \odot 1)].$$

C'est la condition 3 qui garantie que cette dérivation est $\mathsf{bo}(k+\mathsf{d}-1)$ sans être $\mathsf{bo}(k)$. Il y a donc une dérivation bh (grâce au point 4) qui n'est pas $\mathsf{bo}(k)$. Toutefois, il n'est pas certain que $\overline{t} \in \overline{\mathcal{T}}$. En effet, des E peuvent subsister dans le terme. Nous pouvons utiliser des règles de sélection afin qu'il n'en reste plus (cela ne modifie en rien le fait que la dérivation est $\mathsf{bhbo}(k+\mathsf{d}-1)$) et obtenir un terme $\overline{t'} \in \overline{\mathcal{T}}$ et une dérivation bh et qui n'est pas $\mathsf{bo}(k)$

$$s \;{}_{\mathsf{bhbo}(k+\mathsf{d}-1)}{\circ\!\!\longrightarrow}^*_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}}\; \overline{t}[r(\overline{\sigma} \odot 1)] \;{}_{\mathsf{bhbo}(k+\mathsf{d}-1)}{\circ\!\!\longrightarrow}^*_{\mathcal{E}}\; \overline{t'} \in \overline{\mathcal{T}}.$$

Par conséquent, $\mathcal{R}$ n'est pas $\mathsf{FBO}(k)$. Réciproquement, supposons que $\mathcal{R} \notin \mathsf{FBO}(k)$. Il existe une dérivation bh

$$\overline{d} : s \;{}_{\mathsf{bh}}{\circ\!\!\longrightarrow}^n_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}}\; \overline{s_n},$$

dont le denier pas n'est pas $\mathsf{bo}(k)$. Nous avons

— $\overline{s_0} = s_0 \;{}_{\mathsf{bhbo}(k)}{\circ\!\!\longrightarrow}^*_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}}\; \overline{s_{n-1}}$,

— $\overline{s_{n-1}} = \overline{s_{n-1}}[\overline{l_{n-1}\sigma_{n-1}}]_{v_{n-1}}$,

avec $l_{n-1} \in \mathsf{LHS}(\mathcal{R})$ (sinon le dernier pas serait $\mathsf{bo}(0)$). Comme le pas n'est pas $\mathsf{bo}(k)$, nous avons $\mathsf{mmax}(\overline{l_{n-1}}) > k$, et $l_{n-1} \notin \mathcal{V}$. Le point 4 est vérifié puisque la dérivation jusqu'à $\overline{s_n}$ est bh. Pour montrer que le point 3 est satisfait, il reste à montrer que $\mathsf{mmax}(\overline{l_{n-1}}) \leq k + \mathsf{d} - 1$. Le pas étant bh, $\mathsf{m}(\overline{l_i}) = 0$. Nous avons, $\mathsf{m}(\overline{s_{n-1}}/v_{n-1}) = \mathsf{m}(\overline{l_{n-1}}) = 0$. Comme $\mathsf{mmax}(\overline{l_{n-1}}) > k$, et comme il est bien marqué pour k (jusqu'à ce pas, la dérivation est $\mathsf{bo}(k)$), il existe une position $u \in \mathcal{P}\mathsf{os}^{\succ\epsilon}_{\setminus\mathcal{V}}(l_n - 1)$ telle que

$$\forall p \in \mathcal{P}\mathsf{os}^{\succeq\cdot u}_{\setminus\mathcal{V}}(l_{n-1}), \mathsf{m}(\overline{s_{n-1}}/p) = k + 1 + |p| - |u|.$$

(Cette formule est valable car $\mathsf{Card}_E(\mathcal{P}\mathsf{os}(l_{n-1})) = 0$.) Nous avons donc

$$\mathsf{m}(\overline{l_{n-1}}/u) = k + 1.$$

Par définition de dpt, $\forall w \in \mathcal{P}\mathsf{os}_{\setminus\mathcal{V}}(l_n - 1), |w| \leq \mathsf{d} - 1$. De plus $u \neq \epsilon$ puisque $\mathsf{m}(\overline{l_{n-1}}/\epsilon) = 0$ et $|w| - |u| \leq \mathsf{d} - 2$. Nous obtenons

$$\mathsf{m}(\overline{l_{n-1}}/w) = k + 1 + |w| - |u| \leq k + 1 + \mathsf{d} - 2 = k + \mathsf{d} - 1,$$

et le point 3 est lui aussi vérifié. □

Remarque 5.69. *Ce critère montre que tout système $\mathcal{R}$ tel que $\mathsf{d}(\mathcal{R}) \leq 1$, est dans la classe $\mathsf{LFBO}(0)$. En effet, si $\mathsf{LHS}(\mathcal{R}) \leq 1$, alors tout pas de réécriture bh $\overline{s} = \overline{s}[\overline{l}\overline{\sigma}]_v \circ\!\!\rightarrow_{\mathcal{R}} \overline{r} = \overline{s}[r\overline{\sigma}]$ est $\mathsf{bo}(0)$. En effet :*

- *Si $l \in \mathcal{V}$, alors par définition d'un pas bh, $\forall u \prec v, \mathsf{m}(\overline{s}/u) = 0$, et le pas est $\mathsf{bo}(0)$.*
- *Et si $l \in \mathcal{F}_0 \cup \{f(x_0, \ldots, x_{n-1}) \mid f \in \mathcal{F}_n)$, alors par définition d'un pas bh, $\mathsf{m}(\overline{l}) = \mathsf{mmax}(\overline{l}) = 0$, et le pas est $\mathsf{bo}(0)$.*

Le critère de non appartenance à $\mathsf{LFBO}(0)$ ne peut jamais être vérifié lorsque $\mathsf{d}(\mathcal{R}) \leq 1$.

Définition 5.70. *Nous notons $\overline{\mathsf{L}}$ l'ensemble des termes $\overline{s} \in \overline{\mathcal{T}}_E(\mathcal{V})$ bien marqués pour k et tels qu'il existe $v \in \mathbb{N}^*$, $\overline{\sigma} : \mathcal{V} \to \overline{\mathcal{T}}_E$, $l \to r \in \mathcal{R}$, $\overline{l} \in \mathcal{T}(\mathcal{F}^{\mathbb{N}}, \mathcal{V})$, tels que*

$$\mathsf{m}(\overline{l}) = 0,\ k < \mathsf{mmax}(\overline{l}) \leq k + \mathsf{d} - 1,\ \ et\ \overline{s} = \overline{s}[\overline{l}\overline{\sigma}]_v,$$

Nous pouvons ramener notre problème de décidabilité à un test au vide.

Corollaire 5.71. *Le système $\mathcal{R}$ est $\mathsf{FBO}(k)$ si et seulement si*

$$(\ _{\mathsf{bhbo}(k+\mathsf{d}-1)}\circ\!\!\rightarrow^*_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}})[\overline{\mathsf{L}}] \cap \mathcal{T} = \emptyset.$$

Démonstration. Si $(\ _{\mathsf{bhbo}(k+\mathsf{d})}\circ\!\!\rightarrow^*_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}})[\overline{\mathsf{L}}] \cap \mathcal{T} \neq \emptyset$, alors il existe $s \in \mathcal{T}$, $\overline{t} \in \overline{\mathcal{T}}_E$ un terme fortement bien marqué pour k, $v \in \mathcal{P}\mathsf{os}(t)$, $\overline{\sigma} : \mathcal{V} \to \overline{\mathcal{T}}_E$, $l \to r \in \mathcal{R}$, $l \in \mathsf{LHS}(\mathcal{R})$ tels que $k < \mathsf{mmax}(\overline{l}) \leq k + \mathsf{d} - 1$, $\mathsf{m}(\overline{l}) = 0$ et

$$s\ _{\mathsf{bhbo}(k+\mathsf{d}-1)}\circ\!\!\rightarrow^*_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}} \overline{t} = \overline{t}[\overline{l}\overline{\sigma}]_v.$$

Il a donc une dérivation bh

$$s\ _{\mathsf{bhbo}(k+\mathsf{d}-1)}\circ\!\!\rightarrow^*_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}} \overline{t} = \overline{t}[\overline{l}\overline{\sigma}]_v\ _{\mathsf{bhbo}(k+\mathsf{d}-1)}\circ\!\!\rightarrow \overline{t}[r(\overline{\sigma} \odot 1)]_v,$$

qui n'est pas $\mathsf{bo}(k)$ (puisque $\mathsf{mmax}(\overline{l}) > k$), et le système $\mathcal{R}$ n'appartient pas à $\mathsf{FBO}(k)$.
Réciproquement, si $(\ _{\mathsf{bhbo}(k+\mathsf{d})}\circ\!\!\rightarrow^*_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}})[\overline{\mathsf{L}}] \cap \mathcal{T} = \emptyset$, alors le critère de non-appartenance ne peut être rempli, et $\mathcal{R} \in \mathsf{FBO}(k)$. Le résultat est vérifié. □

Nous pouvons maintenant démontrer que le problème de l'appartenance à $\mathsf{FBO}(k)$ est décidable.

Proposition 5.72. *Le problème de l'appartenance à la classe* $\mathsf{FBO}(k)$ *est décidable.*

Démonstration. D'après le corollaire 5.71, un système $\mathcal{R}$ appartient à $\mathsf{FBO}(k)$ si et seulement si

$$(\ _{\mathsf{bhbo}(k+\mathsf{d}-1)}\circ\!\!\to^*_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}})[\overline{\mathsf{L}}] \cap \mathcal{T} = \emptyset.$$

Si $\mathcal{R}$ est $\mathsf{FBO}(k)$ alors,

$$(\ _{\mathsf{bhbo}(k+\mathsf{d}-1)}\circ\!\!\to^*_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}})[\overline{\mathsf{L}}] \cap \mathcal{T} = (\ _{\mathsf{bo}(k+\mathsf{d}-1)}\circ\!\!\to^*_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}})[\overline{\mathsf{L}}] \cap \mathcal{T}(\mathcal{F}) = \emptyset.$$

Sinon, si $\mathcal{R}$ n'est pas $\mathsf{FBO}(k)$ alors $(\ _{\mathsf{bhbo}(k+\mathsf{d}-1)}\circ\!\!\to^*_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}})[\overline{\mathsf{L}}] \cap \mathcal{T} \neq \emptyset$, et comme

$$(\ _{\mathsf{bhbo}(k+\mathsf{d}-1)}\circ\!\!\to^*_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}})[\overline{\mathsf{L}}] \cap \mathcal{T} \subseteq (\ _{\mathsf{bo}(k+\mathsf{d}-1)}\circ\!\!\to^*_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}})[\overline{\mathsf{L}}] \cap \mathcal{T},$$

nous avons

$$(\ _{\mathsf{bo}(k+\mathsf{d}-1)}\circ\!\!\to^*_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}})[\overline{\mathsf{L}}] \cap \mathcal{T} \neq \emptyset.$$

Nous avons donc

$$\begin{gathered} \mathcal{R} \text{ est } \mathsf{FBO}(k) \\ \Leftrightarrow \\ (\ _{\mathsf{bo}(k+\mathsf{d}-1)}\circ\!\!\to^*_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}})[\overline{\mathsf{L}}] \cap \mathcal{T} = \emptyset. \end{gathered}$$

Soit $\mathcal{A}$ l'automate déterministe et complet du corollaire 5.54 page 150 (c'est l'automate qui contient un état $q \in \mathcal{Q} = \mathcal{Q}_f$ et accepte tous les termes). Tout terme $\overline{t}$ tel que $\overline{t} \to^*_{\mathcal{A}_\mathcal{P}^{\mathsf{N}}} \mathsf{Top}_{k+\mathsf{d}-1}(\overline{\mathsf{L}})$ appartient à $\overline{\mathsf{L}}$. Par conséquent, le corollaire 5.54 nous assure que

$$(\ _{\mathsf{bo}(k+\mathsf{d}-1)}\circ\!\!\to^*_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}})[\overline{\mathsf{L}}] \cap \mathcal{T} = (\to^*_\mathcal{G})[\mathsf{Top}_{k+\mathsf{d}-1}(\overline{\mathsf{L}})] \cap \mathcal{T}.$$

Comme les TTC i-préservent la reconnaissabilité, et comme l'ensemble

$$\mathsf{Top}_{k+\mathsf{d}-1}(\overline{\mathsf{L}}) \in \mathcal{T}(\mathcal{F}^{\leq k+\mathsf{d}-1} \cup \{E\} \cup \mathcal{Q}_\mathcal{P}),$$

la condition

$$(\to^*_\mathcal{G})[\mathsf{Top}_{k+\mathsf{d}-1}(\overline{\mathsf{L}})] = \emptyset$$

est testable, et nous pouvons décider si $\mathcal{R} \in \mathsf{FBO}(k)$. □

5.5.7 Inclusion des systèmes growing linéaires à gauche dans la classe FBO

Dans cette section $\mathcal{R}$ est un système de réécriture linéaire à gauche growing, et

$$\mathsf{d} := \max\{dpt(l) \mid l \in \mathsf{LHS}(\mathcal{R})\}.$$

Nous supposerons que $\mathsf{d} > 0$. En effet, il est évident que si $\mathsf{d} = 0$, alors toute dérivation bh est $\mathsf{bo}(0)$ et $\mathcal{R} \in \mathsf{FBO}(0)$.
Un système est growing [59], [73] si toute variable présente dans le membre droit

d'une règle est à profondeur au plus 1 dans le membre gauche de cette règle i.e. $\mathcal{R}$ est growing si toute règle vérifie :

$$\forall l \to r \in \mathcal{R}, \forall x \in \mathcal{V}\mathsf{ar}(r), |\mathsf{pos}(l,x)| \leq 1.$$

Dans le lemme suivant, nous montrons que si $\mathcal{R}$ est growing, alors dans une dérivation marquée bh, tous les termes qui apparaissent sont de la forme

$$\overline{s} = s[s \odot 1/u_0, \ldots, s \odot 1/u_{p-1}]_{\mathcal{P}\mathsf{os}_{\mathcal{F}^1}(\overline{s})}.$$

Comme toutes les marques dans s valent 0, cela signifie que les marques sur une branche de $\overline{s}$ sont soit toutes nulles soit de la forme (en allant de la racine à la feuille) $0, 0, ..., 0, 1, 2, 3, ...n, n+1$ (avec possiblement un nombre nul de 0 si $\mathsf{m}(\overline{s}) = 1$).

Rappelons que $\mathcal{P}\mathsf{os}_{\mathcal{F}^1}(\overline{s})$ est l'ensemble des positions de $\overline{s}$ où il y a un symbole $\mathcal{F}$ marqué par un 1. Si cet ensemble est vide, $\overline{s} = s$.

Nous en déduirons que $\mathcal{R} \in \mathsf{FBO}(\mathsf{d}-1)$.

Lemme 5.73. *Soit $s \in \mathcal{T}$ et*

$$s \ {}_{\mathsf{bh}}{\circ\!\!\longrightarrow}^{n}_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}} \ \overline{s_n} = \overline{t}.$$

Pour tout $m \in \{0, \ldots n\}$,

$$\overline{s_m} = s_m[(s/u_0) \odot 1, \ldots, (s/u_{p-1}) \odot 1].$$

Démonstration. Nous démontrons ce résultat par récurrence sur n. Soit $n = 0$. Le terme s est de la bonne forme et le résultat est vérifié. Soit $n > 0$. Par hypothèse de récurrence nous avons

$$\overline{s_{n-1}} = s_{n-1}[(s_{n-1}/u_0) \odot 1, \ldots, (s_{n-1}/u_{p-1}) \odot 1]_{\mathcal{P}\mathsf{os}_{\mathcal{F}^1}(\overline{s_{n-1}})}.$$

Il y a un pas de dérivation

$$\overline{s_{n-1}} = \overline{s_{n-1}}[\overline{l}\overline{\sigma}]_v \ {}_{\mathsf{bh}}{\circ\!\!\longrightarrow}_{\mathcal{R}\cup\mathcal{E}} \ \overline{s_n} = \overline{s_{n-1}}[r(\overline{\sigma} \odot a)]_v.$$

avec $a = 0$ si $l \to r \in \mathcal{E}$, $a = 1$ sinon. Nous distinguons les cas en fonction de la position v par rapport aux positions u_i.

— $\boldsymbol{\forall u \in \mathcal{P}\mathsf{os}_{\mathcal{F}^1}(\overline{s_{n-1}}), u \perp v.}$

Dans ce cas, $\overline{s}/v$ est non marqué

$$\overline{s}/v = s/v$$

et nous avons

$$\overline{s_{n-1}} = \overline{s_{n-1}}[l\sigma]_v \ {}_{\mathsf{bh}}{\circ\!\!\longrightarrow} \ \overline{s_n} = \overline{s_{n-1}}[r(\sigma \odot a)]_v$$

Si $a = 1$, nous avons $\mathcal{P}\mathsf{os}_{\mathcal{F}^1}(\overline{s_n}) = \{v \cdot u \mid \forall x \in \mathcal{V}\mathsf{ar}(r), u \in \mathcal{P}\mathsf{os}(r,x)\} \cup \mathcal{P}\mathsf{os}_{\mathcal{F}^1}(\overline{s_{n-1}})$ et le résultat est vérifié. Si $a = 0$, $\mathcal{P}\mathsf{os}_{\mathcal{F}^1}(\overline{s_n}) = \{v \cdot u \mid \forall x \in \mathcal{V}\mathsf{ar}(r), u \in \mathcal{P}\mathsf{os}(r,x), i \in \mathbb{N}$ tel que $u \cdot i \in \mathcal{P}\mathsf{os}(x\sigma)\} \cup \mathcal{P}\mathsf{os}_{\mathcal{F}^1}(\overline{s_{n-1}})$. En effet, pour toute variable $x \in \mathcal{V}\mathsf{ar}(r)$,

$$x\sigma \odot 0 = x\sigma[(x\overline{\sigma}/0) \odot 1, \ldots, (x\overline{\sigma}/q-1) \odot 1],$$

où $q-1$ est l'arité de $\mathsf{root}(x\sigma)$.

— $\exists \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{\mathcal{P}\mathsf{os}_{\mathcal{F}^1}(\overline{s_{n-1}}), v \prec u}$.
Remarquons que le système $\mathcal{E}$ est lui aussi growing. Comme le pas est bh, nous avons $\mathsf{m}(\bar{l}) = 0$. Ainsi, pour toute variable à profondeur inférieure à 1 dans l nous avons

$$x\overline{\sigma} = x\sigma[(x\sigma/w_0) \odot 1, \ldots, (x\sigma/w_m) \odot 1]_{\mathcal{P}\mathsf{os}_{\mathcal{F}^1}(x\overline{\sigma})}.$$

Si $a = 1$, alors $x\overline{\sigma} \odot 1 = x\sigma \odot 1$ et le résultat est vérifié. Si $a = 0$, un raisonnement similaire à celui du cas précédent permet de conclure aussi.

— $\exists \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{\mathcal{P}\mathsf{os}_{\mathcal{F}^1}(\overline{s_{n-1}}), v \succeq u}$.
Si la règle appliquée est une règle de $\mathcal{R}$, alors le membre droit est réduit à une variable, et nous avons $x\overline{\sigma} \odot 1 = x\sigma \odot 1 = x\overline{\sigma}$.
Sinon, c'est nécessairement une règle de $\mathcal{E}$ qui est appliqué. Supposons que ce soit la règle d'introduction. Nous avons

$$\overline{s_{n-1}} = \overline{s_{n-1}}[x\overline{\sigma}]_v \circ\!\!\rightarrow \bar{t} = \overline{s_{n-1}}[E(x\overline{\sigma} \odot 0, x\overline{\sigma} \odot 0)]_v$$

Nous avons $\overline{s_{n-1}}/u = (s_{n-1}/u) \odot 1$. Par définition de $\odot$

$$x\overline{\sigma} = x\sigma \odot \mathsf{Card}_{\backslash E}{}^{\prec v}(\mathcal{P}\mathsf{os}(s_{n-1}) - \mathsf{Card}_{\backslash E}{}^{\prec u}(\mathcal{P}\mathsf{os}_{s_{n-1}}) + 1.$$

Ainsi,

$$x\overline{\sigma} \odot 0 = x\sigma \odot \mathsf{Card}_{\backslash E}{}^{\prec v}(\mathcal{P}\mathsf{os}(s_{n-1}) - \mathsf{Card}_{\backslash E}{}^{\prec u}(\mathcal{P}\mathsf{os}_{s_{n-1}}) + 1,$$

et nous avons bien $t/u = (t/u) \odot 1$, et $\mathcal{P}\mathsf{os}_{\mathcal{F}^1}(\bar{t}) = \mathcal{P}\mathsf{os}_{\mathcal{F}^1}(\overline{s_{n-1}})$ et le résultat est vérifié. Le raisonnement est similaire dans le cas d'une règle de sélection.

□

Corollaire 5.74. *Le système $\mathcal{R}$ appartient à la classe* $\mathsf{FBO}(\mathsf{d}-1)$.

Démonstration. Soit $\bar{s} = s \;{}_{\mathsf{bh}}\!\circ\!\!\rightarrow^n \bar{t}$ une dérivation bh. Montrons que pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, lorsque $l_i \to r_i \in \mathcal{R}$,

$$\mathsf{mmax}(\overline{l_i}) \leq \mathsf{d} - 1.$$

Comme le pas est bh, $\mathsf{m}(\overline{l_i}) = 0$. D'après le lemme 5.73, il existe une position $u \succeq v_i$ tel que $\bar{t}/u = t/u \odot 1$.
Si cette position n'est pas de la forme $u = v_i \cdot w$ avec $w \in \mathcal{P}\mathsf{os}_{\backslash \mathcal{V}}(l_i)$, alors $\mathsf{mmax}(l_i) = 0$ et le résultat est vérifié.
Supposons donc que $u = v_i \cdot w$ avec $w \in \mathcal{P}\mathsf{os}_{\backslash \mathcal{V}}(l_i)$. Soit $w' \in \mathcal{P}\mathsf{os}_{\backslash \mathcal{V}}(l_i)$.
Si $w' \prec w$, $\mathsf{m}(\overline{l_i}/w') = 0 \leq \mathsf{d} - 1$.
Sinon, $w' \succeq w$, et par définition de $\odot 1$

$$\mathsf{m}(\overline{l_i}/w') = |w'| - |w| + 1.$$

Comme $\mathsf{m}(\overline{l_i}) = 0$ alors que $\mathsf{m}(\overline{l_i}/w) = 1$, $|w| > 0$, et nous avons

$$\mathsf{m}(\overline{l_i}/w') \leq |w'| \leq \mathsf{d} - 1.$$

La dérivation est donc $\mathsf{bo}(\mathsf{d}-1)$. Nous avons montrer que tout dérivation bh dans $\mathcal{R} \cup \mathcal{E}$ était $\mathsf{bo}(\mathsf{d}-1)$. Le système $\mathcal{R}$ appartient à la classe $\mathsf{FBO}(\mathsf{d}-1)$. □

Proposition 5.75. *Les systèmes growing linéaires à gauche appartiennent à la classe* FBO.

Démonstration. Soit $\mathcal{R}$ un système growing linéaire à gauche et

$$\mathsf{d} := \{\max(dpt(l)) \mid l \in \mathsf{LHS}(\mathcal{R})\}.$$

Si $\mathsf{d} = 0$, alors le système est $\mathsf{FBO}(0)$. Sinon, D'après le corollaire 5.74, $\mathcal{R} \in \mathsf{FBO}(\mathsf{d} - 1)$. □

5.6 Perspectives de recherches

J'ai passé du temps à essayer de montrer que le problème de la terminaison était décidable pour la classe des systèmes $\mathsf{FBO}(k)$, sans aboutir. Un tel résultat aurait permis de démontrer que le problème de la u-terminaison est décidable pour les systèmes growing linéaires à gauche, résultat qui a été conjecturé dans [73]. Clairement, il n'y a pas équivalence entre la u-terminaison du TTC simulant les dérivations $\mathsf{bo}(k)$ d'un système linéaire à gauche $\mathcal{R}$, et la u-terminaison du système $\mathcal{R}$, puisque le TTC ne u-termine pas à cause des règles simulant les règles de $\mathcal{E}$. J'ai tenté de trouver une condition sur les dérivations d'un tel système qui aurait correspondu à une condition décidable sur le TTC, sans succès. Une analyse plus poussée des dérivations infinies dans $\mathcal{R} \cup \mathcal{E}$ correspondant à des dérivations infinies dans $\mathcal{R}$ pourraient peut être permettre méthode de détecter les dérivations $\mathsf{boc}(k)$ infinies convertibles en dérivations infinies de bas en haut $\mathsf{bo}(k)$. Une autre voie pourrait être de définir un autre système $\mathcal{E}$ permettant une définition équivalente de la définition de dérivation $\mathsf{bo}(k)$ de bas en haut dans le cas linéaire gauche, mais permettant de démontrer plus facilement la décidabilité de la terminaison pour la classe $\mathsf{FBO}(k)$. Il serait peut être aussi possible de montrer la décidabilité de ce problème en montrant qu'il est possible de construire une relation d'ordre $>$ bien fondée et telle que pour tout $l \to r \in \mathcal{R}$, $l > r$ en suivant une certaine méthode qui termine si et seulement si $\mathcal{R}$ u-termine.

Les sous-approximations que nous proposons de l'image $(\to_{\mathcal{R}}^*)[T]$ (dans le cas linéaire et linéaire gauche) pourraient peut-être s'avérer utiles à nouveau dans le cadre de l'analyse de protocoles en suivant la méthode de Genet et Klay [40]. Voir même dans les autres domaines cités dans l'introduction de ce document, comme l'analyse syntaxique de programme, les assistants de preuves, ou le développement de nouveaux langages fonctionnels utilisant des concepts issus de la réécriture. Les résultats de i-préservation de la reconnaissabilité que nous présentons, puisqu'il permettent de résoudre le problème du mot, pourraient peut-être aussi permettre de reformuler certains problèmes en algèbre, voir même de les étendre.

Comme nous l'avons signalé dans la section 3.15 et dans l'introduction, les résultats d'i-préservation de la reconnaissabilité et la possibilité de fabriquer une sous-approximation de $(\to_{\mathcal{R}}^*)[T]$ pour tout ensemble reconnaissable T peut être utilisée dans le cadre de dans le cadre de l'analyse de protocoles cryptographiques, en suivant par exemple la méthode de Genet et Klay. Bien d'autres applications sont sans doute possibles, et restent à trouver.

Index général

Index des symboles

Table des figures

Bibliographie

[1] A. V. Aho. Indexed grammars&mdash ;an extension of context-free grammars. *J. ACM*, 15(4), 1968.

[2] B. Alarcón and S. Lucas. Termination of innermost context-sensitive rewriting using dependency pairs. In B. Konev and F. Wolter, editors, *Frontiers of Combining Systems*, volume 4720 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 73–87. Springer Berlin Heidelberg, 2007.

[3] O. Andrei and H. Kirchner. Graph Rewriting and Strategies for Modeling Biochemical Networks. In *International Workshop on Natural Computing and Applications - NCA 2007*. IEEE Computer Society, 2007.

[4] A. Armando, D. Basin, Y. Boichut, Y. Chevalier, L. Compagna, J. Cuellar, P.Hankes Drielsma, P.C. Heám, O. Kouchnarenko, J. Mantovani, S. Mödersheim, D. Oheimb, M. Rusinowitch, J. Santiago, M. Turuani, L. Viganò, and L. Vigneron. The avispa tool for the automated validation of internet security protocols and applications. In K. Etessami and S. Rajamani, editors, *Computer Aided Verification*, volume 3576 of *LNCS*, pages 281–285. Springer Berlin Heidelberg, 2005.

[5] T. Arts and J. Giesl. Proving unnermost normalisation automatically. In H. Comon, editor, *Rewriting Techniques and Applications*, volume 1232 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 157–171. Springer Berlin Heidelberg, 1997.

[6] F. Baader and T. Nipkow. *Term rewriting and all that*. Cambridge University Press, 1998.

[7] G. Berry and L. Cosserat. The esterel synchronous programming language and its mathematical semantics. In *Seminar on Concurrency, Carnegie-Mellon University*, pages 389–448. Springer-Verlag, 1985.

[8] J. Berstel. *Transductions and Context-Free Languages*. Teubner Studienbücher, Stuttgart, 1979.

[9] Y. Boichut, T. Genet, T. Jensen, and L. Le Roux. Rewriting approximations for fast prototyping of static analyzers. In *Proceedings of the 18th International Conference on Term Rewriting and Applications*, RTA'07, pages 48–62. Springer-Verlag, 2007.

[10] Y. Boichut, P. Héam, and O. Kouchnarenko. TA4SP, 2004.

[11] L. Bokut and Y. Chen. Gröbner-Shirshov bases for Lie algebras : after A. I. Shirshov. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, 31(6) :1057–1076, 2007.

[12] C. Borralleras and A. Rubio. The termptation tool. `http://www.lsi.upc.es/~albert`, 2003.

[13] W. Brainerd. Tree generating regular systems. *Information and Computation*, 14 :217–231, 1969.

[14] B. Buchberger. Ein algorithmisches kriterium für die lösbarkeit eines algebraischen gleichungssystems. *Aequationes mathematicae*, 4 :271–272, 1970, également dans sa thèse de Doctorat (1965).

[15] J. Büchi and D. Siefkes. *Finite Automata, Their Algebras and Grammars : Towards a Theory of Formal Expressions.* Springer-Verlag, 1989.

[16] A-C Caron. Linear bounded automata and rewrite systems : Influence of initial configurations on decision properties. In S. Abramsky and T. Maibaum, editors, *TAPSOFT '91*, volume 493 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 74–89. Springer Berlin Heidelberg, 1991.

[17] N. Chomsky. Three models for the description of language. *IRE Transactions on Information Theory*, 2 :113–124, 1956.

[18] A. Church. An unsolvable problem of elementary number theory. *American Journal of Mathematics*, 58(2) :345–363, 1936.

[19] H. Comon, M. Dauchet, R. Gilleron, C. Löding, F. Jacquemard, D. Lugiez, S. Tison, and M. Tommasi. Tree automata techniques and applications. Available on : `http://www.grappa.univ-lille3.fr/tata`, 2007.

[20] E. Contejean, P. Courtieu, J. Forest, O. Pons, and X. Urbain. Automated Certified Proofs with CiME 3. In *Rewriting Techniques and Applications*, volume 10 of *LIPIcs*, pages 21–30, Novi Sad, Serbie, May 2011.

[21] J. Coquidé, M. Dauchet, R. Gilleron, and S. Vágvölgyi. Bottom-up tree pushdown automata : classification and connection with rewrite systems. *Theoretical Computer Science*, 127(1) :69–98, 1994.

[22] B. Courcelle. Graph rewriting : A bibliographical guide. In H. Comon and J. Jouannaud, editors, *Term Rewriting*, volume 909 of *LNCS*, page 74. Springer, 1993.

[23] M. Dauchet. Simulation of turing machines by a left-linear rewrite rule. In N. Dershowitz, editor, *Rewriting Techniques and Applications*, volume 355 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 109–120. Springer Berlin Heidelberg, 1989.

[24] M. Dauchet. Simulation of Turing machines by a regular rewrite rule. *Theoretical Computer Science*, 103(2) :409–420, 1992.

[25] M. Dauchet, T. Heuillard, P. Lescanne, and S. Tison. Decidability of the confluence of finite ground term rewrite systems and of other related term rewrite systems. *Information and Compututation*, 88(2) :187–201, 1990.

[26] M. Dauchet and S. Tison. The theory of ground rewrite systems is decidable. In *Fifth Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science (Philadelphia, PA, 1990)*, pages 242–248. IEEE Comput. Soc. Press, Los Alamitos, CA, 1990.

[27] A. Deruyver and R. Gilleron. The reachability problem for ground TRS and some extensions. In *TAPSOFT '89 (Barcelona, 1989)*, volume 351 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 227–243. Springer, Berlin, 1989.

[28] I. Durand. Autowrite : A tool for term rewrite systems and tree automata. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 124(2) :29 – 49, 2005. Proceedings of the 4th International Workshop on Reduction Strategies in Rewriting and Programming (WRS 2004) Reduction Strategies in Rewriting and Programming 2004.

[29] I. Durand and A. Middeldorp. Decidable call-by-need computations in term rewriting. *Information and Computation*, 196 :95–126, 2005.

[30] I. Durand and G. Sénizergues. Bottom-up rewriting is inverse recognizability preserving. In *Proceedings RTA'07*, volume 4533 of *LNCS*, pages 114–132. Springer-Verlag, 2007.

[31] I. Durand and G. Sénizergues. Bottom-up rewriting for words and terms. *CoRR*, abs/0903.2554, 2013.

[32] I. Durand, M. Sénizergues, and M. Sylvestre. Termination of linear bounded term rewriting systems. In Christopher Lynch, editor, *Proceedings RTA'10*, pages 341–356. LIPIcs, 2010.

[33] W. Dyck. Gruppentheoretische studien. *Mathematische Annalen*, 20, 1882.

[34] W. Dyck. Gruppentheoretische studien ii. ueber die zusammensetzung einer gruppe discreter operationen, über ihre primitivität und transitivität. *Mathematische Annalen*, 22, 1883.

[35] C. C. Elgot and G. Mezei. On relations defined by generalized finite automata. *IBM J. of Res. and Dev.*, 9 :88–101, 1965.

[36] M. Fernández, G. Godoy, and A. Rubio. Orderings for innermost termination. In J. Giesl, editor, *Term Rewriting and Applications*, volume 3467 of *LNCS*, pages 17–31. Springer Berlin Heidelberg, 2005.

[37] O. Fissore, I. Gnaedig, and H. Kirchner. Cariboo : A multi-strategy termination proof tool based on induction. In *in Proceedings of the 6th International Workshop on Termination*, pages 77–79, 2003.

[38] C. Frougny and J. Sakarovitch. Synchronized rational relations of finite and infinite words. *Theor. Comput. Sci.*, 108(1) :45–82, 1993.

[39] T. Genet and I. Gnaedig. Termination proofs using gpo ordering constraints. In M. Bidoit and M. Dauchet, editors, *TAPSOFT*, volume 1214 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 249–260. Springer, 1997.

[40] T. Genet and F. Klay. Rewriting for cryptographic protocol verification. In David McAllester, editor, *Automated Deduction - CADE-17*, volume 1831 of *Le8t8r8 8otes in Computer Science*, pages 271–290. Springer Berlin Heidelberg, 2000.

[41] A. Geser. Omega-termination is undecidable for totally terminating term rewriting systems. *Journal of Symbolic Computation*, 23(4) :399–411, 1997.

[42] A. Geser, D. Hofbauer, and J. Waldmann. Match-bounded string rewriting systems. *Journal Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, 15 :149–171, 2004.

[43] A. Geser, D. Hofbauer, J. Waldmann, and H. Zantema. On tree automata that certify termination of left-linear term rewriting systems. *Inf. Comput.*, 205(4) :512–534, 2007.

[44] A. Geser, A. Middeldorp, E. Ohlebusch, and H. Zantema. Relative undecidability in the termination hierarchy of single rewrite rules. In M. Bidoit and M. Dauchet, editors, *Theory and Practice of Software Development*, volume 1214 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 237–248. Springer Berlin Heidelberg, 1997.

[45] J. Giesl and A. Middeldorp. Innermost termination of context-sensitive rewriting. In M. Ito and M. Toyama, editors, *Developments in Language Theory*, volume 2450 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 231–244. Springer Berlin Heidelberg, 2003.

[46] J. Giesl, P. Schneider-Kamp, and R. Thiemann. Aprove 1.2 : Automatic termination proofs in the dependency pair framework. In *Proceedings of the International Joint Conference on Automated Reasoning*, LNAI 4130, pages 281–286. Springer, 2006.

[47] J. Giesl, R. Thiemann, and P. Schneider-Kamp. Proving and disproving termination of higher-order functions. In *Proceedings of the 5th International Conference on Frontiers of Combining Systems*, FroCoS'05, pages 216–231. Springer-Verlag, 2005.

[48] J. Giesl, R. Thiemann, P. Schneider-Kamp, and S. Falke. Automated termination proofs with aprove. In V. van Oostrom, editor, *Rewriting Techniques and Applications*, volume 3091 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, 2004.

[49] R. Gilleron. Decision problems for term rewriting systems and recognizable tree languages. In *Proceedings of the 8th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science*, pages 148–159. Springer-Verlag, 1991.

[50] R. Gilleron and S. Tison. Regular tree languages and rewrite systems. *Fundamenta Informaticae*, 24(1) :157–176, 1995.

[51] G. Godoy and E. Huntingford. Innermost-reachability and innermost-joinability are decidable for shallow term rewrite systems. In F. Baader, editor, *Term Rewriting and Applications*, volume 4533 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 184–199. Springer Berlin Heidelberg, 2007.

[52] B. Gramlich. On proving termination by innermost termination. In *Rewriting Techniques and Applications*, LNCS, pages 93–107. Springer-Verlag, 1996.

[53] P. Gyenizse and S. Vágvölgyi. Linear generalized semi-monadic rewrite systems effectively preserve recognizability. *Theoretical Computer Science*, 194(1–2) :87–122, 1998.

[54] T. Hibbard. Context-limited grammars. *Journal of the ACM*, 21(3) :446–453, July 1974.

[55] N. Hirokawa and A. Middeldorp. Tyrolean termination tool. In Jürgen Giesl, editor, *Rewriting Techniques and Applications*, volume 3467 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 175–184. Springer, 2005.

[56] D. Hofbauer and J. Waldmann. Deleting string rewriting systems preserve regularity. *Theorical Computer Science*, 327(3) :301–317, 2004.

[57] G. Huet and D. Lankford. On the uniform halting problem for term rewriting systems. Technical report, Rapport Laboria, 1978.

[58] Durand I. and M. Sylvestre. Left-linear bounded term rewriting systems are inverse recognizability preserving. In *Accepted at RTA'11*, pages 1–12. LIPIcs, 2011.

[59] F. Jacquemard. Decidable approximations of term rewriting systems. In *Proceedings of the 7th International Conference on Rewriting Techniques and Applications*, volume 1103 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 362–376, 1996.

[60] P. Jančar, F. Mráz, M. Plátek, and J. Vogel. Monotonicity of restarting automata. *J. Autom. Lang. Comb.*, 12(3) :355–371, 2007.

[61] J. Jouannaud. Processes, terms and cycles. In A. Middeldorp, V. Oostrom, F. Raamsdonk, and R. Vrijer, editors, *Processes, Terms and Cycles : Steps on the Road to Infinity*, chapter Higher-Order Rewriting : Framework, Confluence and Termination, pages 224–250. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2005.

[62] Y. Kaji, T. Fujiware, and T. Kasami. Solving a unification problem under constrained substitutions using tree automata. *Journal of Symbolic Computation*, 23(1) :79 – 117, 1997.

[63] J.W. Klop. Term rewriting systems. In *Handbook of Logic in Computer Science, Vol. 2*, pages 1–116. Oxford University Press, 1992.

[64] D. Knuth and P. Bendix. Simple word problems in universal algebras. In J. Siekmann and G. Wrightson, editors, *Automation of Reasoning*, Symbolic Computation, pages 342–376. Springer Berlin Heidelberg, 1983.

[65] J. Kochems and L. Ong. Improved Functional Flow and Reachability Analyses Using Indexed Linear Tree Grammars. In Manfred S., editor, *International Conference on Rewriting Techniques and Applications*, Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs), pages 187–202. Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik, 2011.

[66] Y. Kojima and M. Sakai. Innermost reachability and context sensitive reachability properties are decidable for linear right-shallow term rewriting systems. In A. Voronkov, editor, *Rewriting Techniques and Applications*, volume 5117 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 187–201. Springer Berlin Heidelberg, 2008.

[67] M. Korp. Tyrolean termination tool 2. In R. Treinen, editor, *Rewriting Techniques and Applications*, volume 5595 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 295–304. Springer, 2009.

[68] X. Leroy. A formally verified compiler back-end. *Journal of Automated Reasoning*, 43(4) :363–446, 2009.

[69] A. N. Maslov. Multilevel pushdown automata. *Problemy Peredači Informacii*, 12(1) :55–62, 1976.

[70] Y. Matiyasevich and G. Sénizergues. Decision problems for semi-Thue systems with a few rules. *Theoretical Computer Science*, 330(1) :145–169, 2005.

[71] A. Middeldorp. Approximations for strategies and termination. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 70(6) :1–20, 2002.

[72] A. Middeldorp and B. Gramlich. Simple termination is difficult. *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, 6(2) :115–128, 1995.

[73] T. Nagaya and Y. Toyama. Decidability for left-linear growing term rewriting systems. *Information and Computation*, 178(2) :499–514, 2002.

[74] J. Pol and H. Zantema. Generalized innermost rewriting. In J. Giesl, editor, *Term Rewriting and Applications*, volume 3467 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 2–16. Springer Berlin Heidelberg, 2005.

[75] Masahiko Sakai and Yi Wang. Undecidable properties on length-two string rewriting systems. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 204(0) :53 – 69, 2008. Proceedings of the 7th International Workshop on Reduction Strategies in Rewriting and Programming (WRS 2007).

[76] J. Sakarovitch. *Syntaxe des langages de Chomsky, essai sur le déterminisme*. PhD thesis, Thèse de doctorat d'état de l'université Paris VII, 1979.

[77] K. Salomaa. Deterministic tree pushdown automata and monadic tree rewriting systems. *Journal of Computer and System Sciences*, 37(3) :367 – 394, 1988.

[78] F. Schernhammer and B. Gramlich. Vmtl-a modular termination laboratory. In R. Treinen, editor, *RTA*, volume 5595 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 285–294. Springer, 2009.

[79] G. Sénizergues. Some undecidable termination problems for semi-Thue systems. *TCS, special issue dedicated to RTA 93*, 142 :257–276, 1995.

[80] D. Sereni and N. Jones. Termination analysis of higher-order functional programs. In *Proceedings of the Third Asian Conference on Programming Languages and Systems*, APLAS, pages 281–297, Berlin, Heidelberg, 2005. Springer-Verlag.

[81] A. Širšov. Some algorithm problems for Lie algebras. *Akademija Nauk SSSR. Sibirskoe Otdelenie. Sibirskiĭ Matematičeskiĭ Žurnal*, 3 :292–296, 1962.

[82] M. Steinby and W. Thomas. Trees and term rewriting in 1910 : on a paper by Axel Thue. *Bulletin of the European Association for Theoretical Computer Science. EATCS*, 72 :256–269, 2000.

[83] M. Sylvestre. Termination of linear bounded term rewriting systems. *Manuscript, submitted to special issue of LMCS dedicated to RTA'10*, pages 1–39, 2010.

[84] G. Sénizergues. Systèmes de réécriture de mots. Cours de DEA à l'univerité Bordeaux 1, non publié.

[85] T. Takai, Y. Kaji, and H. Seki. Right-linear finite path overlapping rewrite systems effectively preserve recognizability. *Sci. Math. Jpn.*, 71(2) :127–153, 2010. Earlier version in proceedings 11th RTA, LNCS 1833, p. 246–260, 2000.

[86] The Coq Development Team. The coq proof assistant reference manual, 2009.

[87] Terese. *Term Rewriting Systems.* Cambridge University Press, 2003.

[88] R. Thiemann, J. Giesl, and P. Schneider-Kamp. Deciding innermost loops. In Andrei Voronkov, editor, *Rewriting Techniques and Applications*, volume 5117 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 366–380. Springer Berlin Heidelberg, 2008.

[89] R. Thiemann and A. Middeldorp. Innermost termination of rewriting systems by labeling. In *In Proceedings of the Workshop on Reduction Strategies*, ENTCS, page 24, 2007.

[90] A. Thue. Die lösung eines spezialfalles eines generellen logichen problems. *Kra. Videnskabs-Selskabets Skrifter. I. Mat. Nat. Kl.,*, 8, 1910. Reprinted in his *Selected mathematical papers*, Universitetsforlaget, Oslo, 1977, pp.273–310.

[91] A. Thue. Probleme über veränderungen von zeichenreihen nach gegebenen regeln. *Skr. Vid. Kristiania, I Mat. Naturv. Klasse,*, 10 :34, 1914. Reprinted in his *Selected mathematical papers*, Universitetsforlaget, Oslo, 1977, p. 493–524.

[92] A. Turing. On computable numbers, with an application to the entscheidungsproblem. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 42 :230–265, 1936.

[93] J. Waldmann. Matchbox : A tool for match-bounded string rewriting. In *RTA*, pages 85–94, 2004.

[94] H. Zantema. Total termination of term rewriting is undecidable. *Journal of Symbolic Computation*, 20(1) :43–60, 1995.

[95] H. Zantema. Torpa : Termination of rewriting proved automatically. In V. Oostrom, editor, *Rewriting Techniques and Applications*, volume 3091 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 95–104. Springer Berlin Heidelberg, 2004.